Stochastische Prozesse

Ein stochastischer Prozess $\{X_i\}$ ist eine indizierte Folge von Zufallsvariablen. Zwischen den Zufallsvariablen kann es eine willkürliche Abhängigkeit geben.

Definition: Ein stochastischer Prozess heißt <u>stationär</u> wenn die gemeinsame Verteilung jeder Teilmenge der Folge von Zufallsvariablen invariant ist in Bezug auf Veränderungen im Zeitindex. Das heißt
$Pr\{ X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n\} = Pr\{ X_{1+l} = x_1, X_{2+l} = x_2, \ldots, X_{n+l} = x_n\}$
für alle n und jede Verschiebung l und für alle $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathcal{X}$.

Definition: Ein diskreter stochastischer Prozess $X_1, X_2, \ldots$ heißt <u>Markov-Kette</u> , wenn für n =1, 2, …,
$Pr(X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_n = x_n, X_{n-1} = x_{n-1}, \ldots, X_1 = x_1) = Pr(X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_n = x_n)$
für alle $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1} \in \mathcal{X}$ gilt.

Definition: Eine Markov-Kette heißt <u>stationär</u> oder <u>homogen</u>, wenn sie Zeit invariant ist. Das heißt
$Pr(X_{n+1} = b \mid X_n = a) = Pr(X_2 = b \mid X_1 = a)$
für alle a, b $\in \mathcal{X}$.

Definition: Die <u>Entropieraten</u> von einem stochastischen Prozess sind definiert als
$H(\{X_i\}) = \lim_{n\to\infty} 1/n * H(X_1, X_2, \ldots, X_n)$
$H'(\{X_i\}) = \lim_{n\to\infty} H(X_n \mid X_{n-1}, \ldots, X_1)$
falls diese existieren.

Theorem: Für einen stationären Prozess existieren die beiden Entropieraten und es gilt
$H(\{X_i\}) = H'(\{X_i\})$.

Korollar: Für eine stationäre Markov-Kette ist die Entropierate
$H(\{X_i\}) = H'(\{X_i\}) = H(X_2 \mid X_1)$.

Definition: Die <u>Übergangsmatrix</u> P einer Markov-Kette ist definiert als $P = [P_{ij}]$ mit i, j $\in \{1,2, \ldots, m\}$, wobei $P_{ij} = Pr(X_{n+1} = j \mid X_n = i)$.

Anna Heinrich

Definition: Eine <u>Verteilung</u> μ einer Markov Kette heißt stationär, falls $\mu P = \mu$.

Theorem: Sei $\{X_i\}$ eine stationäre Markov Kette mit stationärer Verteilung μ und Übergangsmatrix P. Sei $X_1 \sim \mu$. Dann ist die Entropierate $H(\{X_i\}) = - \sum_{i,j} \mu_i P_{ij} \log P_{ij}$.

Lemma: $H(Y_n \mid Y_{n-1}, \ldots, Y_2, X_1) \leq H(\{Y_i\})$.

Lemma: $H(Y_n \mid Y_{n-1}, \ldots, Y_1) - H(Y_n \mid Y_{n-1}, \ldots, Y_1, X_1) \to 0$.

Theorem: Wenn $X_1, X_2, \ldots, X_n$ eine stationäre Markov-Kette formen und $Y_i = \Phi(X_i)$, dann gilt
$H(Y_n \mid Y_{n-1}, \ldots, Y_1, X_1) \leq H(\{Y_i\}) \leq H(Y_n \mid Y_{n-1}, \ldots, Y_1)$ und
$\lim H(Y_n \mid Y_{n-1}, \ldots, Y_1, X_1) = H(\{Y_i\}) = \lim H(Y_n \mid Y_{n-1}, \ldots, Y_1)$.

Literatur:

- Thomas M. Cover and Joy A. Thomas, Elements of Information Theory, Wiley-Interscience; 2 edition (2006)
- Michael Wolf, Information Theory, lecture notes WS 2012/13 TUM

Anna Heinrich