Das Bemerkenswerte ist, dass diese Ungl. von Quantensystemen verletzt werden kann. Seien dazu, wie gehabt, $M_x$ und $\tilde{M}_y$ die POVMs, die Alices & Bobs Messung beschreiben, und $A_x := M_x(1) - M_x(-1)$, $B_y := \tilde{M}_y(1) - \tilde{M}_y(-1)$ sowie

$$\mathbb{B} := A_1 \otimes (B_1 + B_2) + A_2 \otimes (B_1 - B_2).$$

Die linke Seite der CHSH-Ungl. lautet dann $|\mathrm{tr}[\rho \mathbb{B}]|$.

<u>Thm.:</u> Für alle Dichteoperatoren $\rho \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B)$ und alle $\mathbb{B}$'s wie oben gilt

$$\boxed{|\mathrm{tr}[\rho \mathbb{B}]| \leq 2\sqrt{2}}$$

und es existiert ein reiner Zustand $\rho \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2)$ sowie Observable $A_x \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^2)$, $B_y \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^2)$ mit Eigenwerten $\{\pm 1\}$, so dass Gleichheit gilt.

<u>Beweis:</u> Die Abb. $A_1 \mapsto \mathrm{tr}[\rho \mathbb{B}]$ ist ein affines Funktional, das auf der konvexen Menge $-\mathbb{1} \leq A_1 \leq \mathbb{1}$ sein Supremum auf einem Extrempunkt annimmt. Letztere sind durch $\mathrm{spec}(A_1) \in \{\pm 1\}$ also durch $A_1^2 = \mathbb{1}$ gegeben.

O.B.d.A. können wir daher annehmen, dass $A_x, B_y$ sich zu $\mathbb{1}$ quadrieren.

Mit dieser Eigenschaft erhalten wir: $\mathbb{B}^2 = 4\,\mathbb{1} \otimes \mathbb{1} + [A_1, A_2] \otimes [B_1, B_2]$.

Aus Positivität der Varianz folgt damit:

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}[\rho \mathbb{B}]^2 &\overset{(1)}{\leq} \mathrm{tr}[\rho \mathbb{B}^2] = 4 + \mathrm{tr}\big[\rho\, [A_1, A_2] \otimes [B_1, B_2]\big] \\
&\overset{(2)}{\leq} 4 + \|[A_1, A_2] \otimes [B_1, B_2]\| \\
&\overset{(3)}{\leq} 8
\end{aligned}$$

wobei die letzte Ungl. verwendet, dass $\|[A_1, A_2]\| \leq \|A_1 A_2\| + \|A_2 A_1\|$
$\leq 2\|A_1\|\,\|A_2\| = 2$.

Ist $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ und $\mathbb{B}|\psi\rangle = \nu|\psi\rangle$, dann gilt '=' in (1).

Seien nun $A_1 = B_1 = \sigma_1$ und $A_2 = B_2 = \sigma_2$ Pauli-Matrizen, dann hat $\mathbb{B}^2 = 4(\mathbb{1} + \sigma_3 \otimes \sigma_3)$ Eigenwerte 0 und 8. D.h. wir können $\nu$ so wählen, dass $\nu^2 = 8$ womit '=' auch in (2) & (3) gilt. $\square$

**Bem.:**

- '82: Experimente von Alain Aspect bestätigen die Verletzung der CHSH-Ungl. mit $\langle B \rangle \sim 2\sqrt{2}$.
  Dies verwendete „down conversion" in einem nicht-linearen Kristall, der Paare von Photonen produziert, deren Polarisationsfreiheitsgrade CHSH verletzen.
- '64: John Bell realisiert, dass die Debatte, die '35 zw. Einstein & Bohr begann und bis '64 als metaphysisch galt, experimentell entschieden werden kann.
- 2015: Erstes Experiment, dass CHSH ohne 'Loopholes' verletzt.
- Der Quantenzustand, der CHSH maximal verletzt gehört zur Familie der sog. 'maximal verschränkten' Zustände:

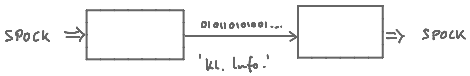
**Def.:** Ein reiner Zustand $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ mit $\psi \in \mathbb{C}^d \otimes \mathbb{C}^d$ heißt 'maximal verschränkt', wenn für die reduzierten Dichteoperatoren gilt: $\rho_A = \rho_B = \frac{\mathbb{1}}{d}$.

**Bsp.:** Ist $\{|i\rangle\}_{i=1}^{d}$ ONB, dann ist $|\Omega\rangle := \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{i=1}^{d} \underbrace{|i,i\rangle}_{:= |i\rangle \otimes |i\rangle}$ max. verschränkt.

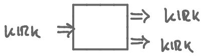
**Bem.:** Aus der Schmidt-Zerlegung folgt, dass $|\psi\rangle \in \mathbb{C}^d \otimes \mathbb{C}^d$ genau dann max. verschränkt ist, wenn es eine unitäre $U \in \mathbb{C}^{d \times d}$ gibt, so dass $|\psi\rangle = (\mathbb{1} \otimes U)|\Omega\rangle$.

# VII. Unmögliche Maschinen

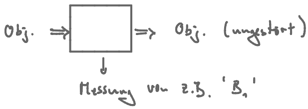
## ① Klassische Teleportation



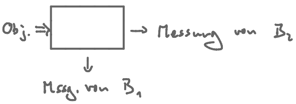

## ② Klonieren




## ③ Messen ohne Stören




## ④ Gemeinsame Messbarkeit




## ⑤ 'Bell-Telefon' (für instantane Kommunikation)

**Annahme:** Bob ist im Besitz eines Apparates zur gemeinsamen Messung von $B_1$ & $B_2$ und setzt diesen in einen 'CHSH-Experiment' ein in dem die CHSH-Ungl. verletzt wird.

**Ziel:** Instantane Kommunikation von Alice zu Bob.

**Protokoll:** Alice entscheidet sich für die Messung von entweder $A_1$ oder $A_2$ je mit Wsk. $\frac{1}{2}$.
Bob tippt auf $A_1$ ($A_2$), wenn $b_1 = b_2$ ($b_1 \neq b_2$).