TUTORIUMSAUFGABE 1.1

Ein Insekt legt eine $\mathcal{P}_\lambda$-verteilte Anzahl von Eiern, aus denen jeweils unabh. voneinander mit Wk. p eine Larve schlüpft.

λ, p sind unbekannt.

a) Brauche zunächst einen genügend großen Ergebnisraum Ω:

→ jedes von n Insekten liefert zwei Kennzahlen:

Anzahl gelegter Eier, Anzahl geschlüpfter Larven

→ setze $\Omega = (\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0)^n$

Ω ist diskret, setze $\mathcal{F} := \mathcal{P}(\Omega)$

Seien $X_i(\omega) := \omega_{2i-1}$ Anzahl der gelegten Eier von Insekt i

$Y_i(\omega) := \omega_{2i}$ Anzahl geschlüpfter Larven — " —

Treffe nun plausible Annahmen, um $\mathbb{P}_\theta$ zu basteln:

i) $(X_1,Y_1),\dots,(X_n,Y_n)$ (als Vektoren) unabhängig voneinander

ii) $(X_1,Y_1),\dots,(X_n,Y_n)$ identisch verteilt

iii) $X_i \sim \mathcal{P}_\lambda$ $i=1,\dots n$

Y_i gegeben $X_i = n \sim B_{n,p}$, $i=1,\dots n$ (wegen unabhängigem schlüpfen)

Wegen i) ist jedes $\mathbb{P}_\theta$ ein Produktmaß von n wegen ii) gleichen Wmaßen auf $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$. Sei $Q_{\lambda,p}$ letzteres Maß, dann

$$Q_{\lambda,p}(\{(n,k)\}) = \mathbb{P}_{(X_1,Y_1)}(n,k) = \mathbb{P}(X_1 = n,\ Y=k)$$

$$= \underbrace{\mathbb{P}(Y_1 = k \mid X_1 = n)}\cdot\underbrace{\mathbb{P}(X_1 = n)}$$

$$= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \cdot \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$$

(wegen iii) gilt $\mathbb{P}(X_1=n)>0$, also bedingte Verteilung wohldefiniert

$Q_{\lambda,p}$ hängt nur von $\lambda>0$ und $p\in[0,1]$ ab, also ist das parametrische Modell

$$\left(\mathbb{N}_0^{2n}, \mathcal{P}(\mathbb{N}_0^{2n}), \left(Q_{\lambda,p}^{\otimes n}\right)_{(\lambda,p)\in\Theta}\right), \quad \Theta = \{(\lambda,p) \mid \lambda>0, p\in[0,1]\}.$$

b) ~~Ergebnisraum~~ $\cancel{\Omega = \mathbb{N}_0^n}$, $\cancel{Y_i(\omega) = \omega_i}$ Y_i sei wieder Anzahl der geschlüpften Larven

Berechne die Randverteilung von Y_1

$$\mathbb{P}_{Y_1}(k) = \mathbb{P}(Y=k) = \sum_{n=k}^{\infty}\mathbb{P}(Y=k, X=n) = \sum_{n=k}^{\infty} Q_{\lambda,p}((n,k)) = e^{-\lambda p}\cdot\frac{(\lambda p)^k}{k!}\underbrace{\sum_{n=k}^{\infty} e^{-\lambda(1-p)}\frac{(\lambda(1-p))^n}{(n-k)!}}_{=1}$$

also sind $\Theta = \mathbb{R}_+$, $\mathbb{P}_{Y_i} = \mathcal{P}_{\lambda p}$ und das Modell ist

$$\left(\mathbb{N}_0^n, \mathcal{P}(\mathbb{N}_0^n), \left(\mathcal{P}_\theta^{\otimes n}\right)_{\theta\in\mathbb{R}_+}\right).$$