

Übungsblatt 3 Statistik: Grundlagen MA 2402

Ausgabe: 16. Mai 2011

Abgabe: 23. Mai 2011 um 12:00 Uhr

Wo: "Statistik: Grundlagen SoSe 2011"-Briefkasten im Untergeschoss
(bitte Gruppe auf Abgabe vermerken)

Aufgabe 3.1 (Maximum-Likelihood-Schätzer)

5 Punkte

Seien X_1, \dots, X_n die Projektionen eines n -fachen Produktmodells $(\Omega^n, \mathcal{F}^{\otimes n}, (Q_\theta^{\otimes n})_{\theta \in \Theta})$, wobei Q_θ für alle $\theta \in \Theta = (0, \infty)$ die Dichtefunktion ρ_θ besitzt. Bestimmen Sie für die folgenden Dichtefunktionen den Maximum-Likelihood-Schätzer T für θ .

- (a) $\rho_\theta(x) = \theta e^{-\theta x} \cdot \mathbf{1}_{x>0}$ (Exponentialverteilung),
- (b) $\rho_\theta(x) = \theta x^{-\theta-1} \cdot \mathbf{1}_{x>1}$ (Paretoverteilung),
- (c) $\rho_\theta(x) = \theta c x^{c-1} e^{-\theta x^c}$, $c > 0$ konstant, $x > 0$ (Weibullverteilung).

Aufgabe 3.2 (Maximum-Likelihood-Schätzer)

5 Punkte

Seien X_1, \dots, X_n die Projektionen eines n -fachen Produktmodells $(\Omega^n, \mathcal{F}^{\otimes n}, (Q_\theta^{\otimes n})_{\theta \in \Theta})$, wobei Q_θ für alle $\theta \in \Theta = (0, \infty)$ die folgende Dichtefunktion besitzt:

$$\rho_\theta(x) = e^{-(x-(\theta-1))} \cdot \mathbf{1}_{x>\theta-1}.$$

- (a) Berechnen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer T für $\tau(\theta) = \theta$ und bestimmen Sie dessen Verteilungsfunktion, Erwartungswert und Varianz unter dem wahren Parameter θ .
- (b) In diesem Modell wurden die folgenden zehn Werte gemessen:

2.71 2.43 3.87 4.12 2.36 2.24 3.53 3.28 2.96 2.87.

Berechnen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer für diese Messreihe. Bestimmen Sie außerdem den Erwartungswert und die Varianz der Zufallsvariable X_1 unter der Annahme, dass der geschätzte Wert gleich dem wahren Parameter der zugrunde liegenden Verteilung ist. Vergleichen Sie diese Kennzahlen mit dem empirischen Mittel und der empirischen Varianz der Messreihe.