

## Übungsblatt 10 Statistik: Grundlagen MA 2402

*Ausgabe: 11. Juli 2011*

*Abgabe: 18. Juli 2011 um 10:00 Uhr*

*Wo: "Statistik: Grundlagen SoSe 2011"-Briefkasten im Untergeschoss  
(bitte Gruppe auf Abgabe vermerken)*

### Aufgabe 10.1 (t-Test)

*5 Punkte*

Laut einem Tierlexikon haben ausgewachsene Wombats ein normalverteiltes Gewicht von durchschnittlich 27.6 kg. Der skeptische Biologe Hilmar bezweifelt diese Gewichtsangabe und stellt bei 41 ausgewachsenen Wombats ein mittleres Gewicht von  $\bar{x} = 29.556$  kg bei einer empirischen Varianz von  $s^2 = 47.88$  fest.

- (a) Überprüfen Sie Hilmars Behauptung mit Hilfe eines geeigneten Testverfahrens zu den Niveaus 5% und 10%. Interpretieren Sie Ihre Ergebnisse.
- (b) Bis zu welchem Niveau könnte Hilmar die Nullhypothese gerade noch verwerfen?

### Aufgabe 10.2 (Statistik SoSe 2010)

*5 Punkte*

Anton hat eine Abfüllanlage für Mineralwasser gekauft. Der Hersteller behauptet, dass die abgefüllte Menge pro Flasche normalverteilt ist mit Erwartungswert 1000 ml und Standardabweichung 10 ml. Anton glaubt an die Normalverteilungsannahme und an den vom Hersteller angegebenen Erwartungswert. Die Angabe zur Standardabweichung möchte er jedoch überprüfen. Dazu nimmt Anton eine Stichprobe von 50 Flaschen und bestimmt ihren Inhalt.

- (a) Formulieren Sie ein geeignetes statistisches Modell.
- (b) Die Zufallsvariable  $X_i$  soll den Inhalt der i-ten Flasche modellieren. Anton möchte einen Test

$$H_0 : \text{Varianz} < 110 \text{ ml}^2 \text{ gegen } H_1 : \text{Varianz} \geq 110 \text{ ml}^2$$

konstruieren. Der Ablehnungsbereich des Tests soll von der Form

$$K_c = \left\{ \frac{1}{50} \sum_{i=1}^{50} (X_i - 1000)^2 \geq c \right\}$$

sein mit einem geeigneten  $c \in \mathbb{R}$ .

Bestimmen Sie  $c$  so, dass der Test mit Ablehnungsbereich  $K_c$  das Signifikanzniveau  $\alpha$  hat.

Die letzte wie auch die folgenden Aufgaben stammen aus alten Klausuren und Nachklausuren – mit drei Aufgaben darf in der Klausur gerechnet werden. Die Bearbeitung der folgenden Aufgaben aus bringt keine Bonuspunkte. Nicht zu unterschätzen ist der Effekt durch das Auseinandersetzen mit den Aufgaben unter Prüfungsbedingungen. Lösungsvorschläge ohne Muster sind am 18.07. in der Vorlesung erhältlich, auch Tutorien sind für Fragen dazu offen.

### Aufgabe 10.3 (aus Statistik, SoSe 2010)

Für  $\lambda > 0$  ist

$$x \mapsto \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x|}, \quad x \in \mathbb{R},$$

eine Wahrscheinlichkeitsdichte. Bestimmen Sie das 95%-Quantil der zugehörigen Verteilung.

### Aufgabe 10.4 (aus Statistik, SoSe 2010)

Betrachten Sie für  $n \in \mathbb{N}$  das statistische Modell

$$(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \mathcal{P} = \{N(\mu, \sigma^2)^{\otimes n} : \mu \in [1, 2], \sigma^2 > 5\}).$$

Es bezeichne  $X_1, X_2, \dots, X_n$  das Ergebnis des zugehörigen Zufallsexperiments. Ist  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$

konsistent für  $\sigma^2$ ? Bitte begründen Sie Ihre Antwort.

### Aufgabe 10.5 (aus Statistik SoSe 2010)

Johanna beobachtet  $(x_1, x_2, \dots, x_{100}) \in \mathbb{R}^{100}$  und berechnet empirisches Mittel und empirische Varianz:

$$\bar{x} = 2, \quad s_x^2 = \frac{1}{3}.$$

Lehnt der Test mit Ablehnungsbereich

$$\left\{ (x_1, x_2, \dots, x_{100}) \in \mathbb{R}^{100} : \frac{1}{100} \sum_{i=1}^{100} x_i^2 > 7 \right\}$$

die Nullhypothese ab, wenn er mit Johannas Daten durchgeführt wird?

### Aufgabe 10.6 (Stochastik I WS 2007/08)

Die kleine Anna hat zwei Münzen. Sie wirft jede Münze einmal und beobachtet bei beiden Würfeln “Kopf”. Es soll die Nullhypothese getestet werden “Beide Münzen liefern mit derselben Wahrscheinlichkeit Kopf” gegen die Alternative “Die beiden Münzen liefern mit verschiedenen Wahrscheinlichkeiten Kopf”. Die Nullhypothese soll verworfen werden, wenn die beiden Münzwürfe verschiedene Ergebnisse liefern.

- Beschreiben Sie die Situation durch ein geeignetes statistisches Modell.
- Formulieren Sie formal das Testproblem und den beschriebenen Test, d.h. geben Sie die Nullhypothese, die Alternativhypothese und den Ablehnungsbereich an.
- Berechnen Sie das Signifikanzniveau und die Macht des Tests.
- Führen Sie den Test für Annas Beobachtung aus.