....
Note

	I	II
1		
2		
3		
4		
5		
6		
Σ		

I ....
Erstkorrektur

II ....
Zweitkorrektur

Name

Vorname

Matrikelnummer

Studiengang

Unterschrift der Kandidatin/des Kandidaten

TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Fakultät für Mathematik

Klausur
Funktionentheorie
MA2008 (Lehramt)

Prof. Dr. R. König

21. Juli 2016, 8:30 – 9:30 Uhr

Hörsaal: .... Reihe: .... Platz: ....

Hinweise:

Überprüfen Sie die Vollständigkeit der Angabe: **6** Aufgaben

Bearbeitungszeit: **60** min

Hilfsmittel: Ein selbsterstelltes Din A4 Blatt

Bei Aufgaben mit Kästchen werden nur die Resultate **in diesen Kästchen** berücksichtigt.

Nur von der Aufsicht auszufüllen:

Hörsaal verlassen von .... bis ....

Vorzeitig abgegeben um ....

Besondere Bemerkungen:

1. **Komplexe Wegintegrale** **[8 Punkte]**

Gegeben ist die Menge $M := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) > 0,\ |z| < 2\}$.

(a) Geben Sie unter Beachtung der Umlaufrichtung eine Parametrisierung von ∂M durch zwei Wege an.

$\gamma_1(t) =$ $\qquad\qquad$ $t \in$	$\gamma_2(t) =$ $\qquad\qquad$ $t \in$

(b) Berechnen Sie den Wert des Integrals $\displaystyle\int_{\partial M} \overline{z}\,\mathrm{d}z$.

$$\int_{\partial M} \overline{z}\,\mathrm{d}z =$$

(c) Berechnen Sie den Wert des Integrals $\displaystyle\int_{\partial M} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z^3}}{z^2+1}\mathrm{d}z$.

$$\int_{\partial M} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z^3}}{z^2+1}\mathrm{d}z =$$

2. **Existenz einer Stammfunktion** **[6 Punkte]**

Sei $f(z) = \dfrac{\cos z}{\mathrm{e}^{2z} - 1}$.

(a) Berechnen Sie das Residuum von f bei 0.

(b) Entscheiden Sie mit Begründung, ob f auf $B_1(0) \setminus \{0\}$ eine Stammfunktion besitzt.

3. **Identitätssatz** **[6 Punkte]**

Entscheiden Sie jeweils mit Begründung, ob es eine holomorphe Funktion $f : B_1(0) \to \mathbb{C}$ mit der folgenden Eigenschaft gibt:

(a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $f(\frac{1}{n}) = \frac{n}{n^2-1}$.

(b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $f(\frac{1}{n}) = \begin{cases} \frac{1}{n^2} & \text{falls } n \text{ eine Primzahl ist,} \\ -\frac{1}{n^2} & \text{sonst.} \end{cases}$

4. **Biholomorphe Äquivalenz** **[8 Punkte]**

Konstruieren Sie jeweils eine biholomorphe Abbildung zwischen den zwei angegebenen Mengen, oder begründen Sie, warum es keine solche biholomorphe Abbildung geben kann.

(a) $Q := \{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Re}\,(z) > 0 \wedge \mathrm{Im}\,(z) > 0\}$ und $B_1(0)$,

(b) $\mathbb{C}^- = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{R} \,|\, z \leq 0\}$ und $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$,

(c) $S := \{z \in \mathbb{C} \,|\, 0 < \mathrm{Im}\,(z) < 1\}$ und $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Im}\,(z) > 0\}$.

5. **Windungszahl** **[5 Punkte]**

Sei $f(z) = z^n$ mit $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie: Für einen geschlossenen Weg γ mit $0 \notin \operatorname{im}(\gamma)$ gilt

$$W_{f\circ\gamma}(0) = nW_\gamma(0).$$

6. **Satz von Rouché und Vielfachheit von Nullstellen** **[10 Punkte]**

(a) Bestimmen Sie die Anzahl der Nullstellen (mit Vielfachheit gezählt) von $e^{2z} - 10z^7$ auf $B_1(0)$.

(b) Bestimmen Sie die genaue Anzahl von Lösungen der Gleichung $e^{2z} = 10z^7$ für die $|z| < 1$ gilt. Begründen Sie Ihre Antwort.