....
Note

	I	II
1		
2		
3		
4		
5		
6		
$\sum$		

I ....
Erstkorrektur

II ....
Zweitkorrektur

Name

Vorname

Matrikelnummer

Studiengang

Unterschrift der Kandidatin/des Kandidaten

TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Fakultät für Mathematik

Klausur
Funktionentheorie
MA2006 (BSc)

Prof. Dr. R. König

21. Juli 2016, 8:30 – 9:30 Uhr

Hörsaal: .... Reihe: .... Platz: ....

Hinweise:

Überprüfen Sie die Vollständigkeit der Angabe: **6** Aufgaben

Bearbeitungszeit: **60** min

Hilfsmittel: Ein selbsterstelltes Din A4 Blatt

Bei Aufgaben mit Kästchen werden nur die Resultate **in diesen Kästchen** berücksichtigt.

Nur von der Aufsicht auszufüllen:

Hörsaal verlassen von .... bis ....

Vorzeitig abgegeben um ....

Besondere Bemerkungen:

1. **Komplexe Wegintegrale** **[8 Punkte]**

Gegeben ist die Menge $M := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}\,(z) > 0,\ |z| < 2\}$.

(a) Geben Sie unter Beachtung der Umlaufrichtung eine Parametrisierung von ∂M durch zwei Wege an.

$\gamma_1(t) =$ $\qquad\qquad$ $t \in$	$\gamma_2(t) =$ $\qquad\qquad$ $t \in$

(b) Berechnen Sie den Wert des Integrals $\displaystyle\int_{\partial M} \overline{z}\mathrm{d}z$.

$$\int_{\partial M} \overline{z}\mathrm{d}z =$$

(c) Berechnen Sie den Wert des Integrals $\displaystyle\int_{\partial M} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z^3}}{z^2+1}\mathrm{d}z$.

$$\int_{\partial M} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z^3}}{z^2+1}\mathrm{d}z =$$

2. **Existenz einer Stammfunktion** **[6 Punkte]**

Sei $f(z) = \dfrac{\cos z}{\mathrm{e}^{2z} - 1}$.

(a) Berechnen Sie das Residuum von f bei 0.

(b) Entscheiden Sie mit Begründung, ob f auf $B_1(0) \setminus \{0\}$ eine Stammfunktion besitzt.

3. **Identitätssatz** **[6 Punkte]**

Entscheiden Sie jeweils mit Begründung, ob es eine holomorphe Funktion $f : B_1(0) \to \mathbb{C}$ mit der folgenden Eigenschaft gibt:

(a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $f(\frac{1}{n}) = \frac{n}{n^2-1}$.

(b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $f(\frac{1}{n}) = \begin{cases} \frac{1}{n^2} & \text{falls } n \text{ eine Primzahl ist,} \\ -\frac{1}{n^2} & \text{sonst.} \end{cases}$

4. **Fortsetzung zu einer ganzen Funktion** **[8 Punkte]**

Sei $Q := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}\,(z) \in [0,1], \mathrm{Im}\,(z) \in [0,1]\}$ und $f : Q \to \mathbb{C}$ mit $f(t) = f(t+\mathrm{i})$ und $f(\mathrm{i}t) = f(1+\mathrm{i}t)$ für $t \in [0,1]$. Zeigen Sie: Kann f zu einer ganzen Funktion $\tilde{f} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ fortgesetzt werden, so gilt:

(a) für alle $z \in \mathbb{C}$ ist $\tilde{f}(z) = \tilde{f}(z+\mathrm{i})$,

(b) für alle $z \in \mathbb{C}$ ist $\tilde{f}(z) = \tilde{f}(z+1)$,

(c) f ist konstant.

5. **Windungszahl** **[5 Punkte]**

Sei $f(z) = z^n$ mit $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie: Für einen geschlossenen Weg γ mit $0 \notin \mathrm{im}(\gamma)$ gilt

$$W_{f\circ\gamma}(0) = nW_\gamma(0).$$

6. **Satz von Rouché und Vielfachheit von Nullstellen** **[10 Punkte]**

(a) Bestimmen Sie die Anzahl der Nullstellen (mit Vielfachheit gezählt) von $\mathrm{e}^{2z} - 10z^7$ auf $B_1(0)$.

(b) Bestimmen Sie die genaue Anzahl von Lösungen der Gleichung $\mathrm{e}^{2z} = 10z^7$ für die $|z| < 1$ gilt. Begründen Sie Ihre Antwort.