TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Zentrum Mathematik

Prof. Dr. R. König
Dr. M. Prähofer

Funktionentheorie
MA2006/MA2008

Sommersemester 2016
Blatt 12
(5.7.2016)

http://www-m5.ma.tum.de/Allgemeines/MA2006_2016S

Hausaufgaben

H12.1. Satz von Rouché (Staatsexamensaufgabe)

Bestimmen Sie die Anzahl der Nullstellen des Polynoms $p(z) = 2z^5 - 6z^2 + z + 1$ im Ringgebiet $1 \leq |z| \leq 2$. Sind darunter auch reelle Nullstellen?

H12.2. Eigenschaften von Möbiustransformationen

Für $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ setzen wir $f_M(z) := \frac{az+b}{cz+d}$. Ist $\det(M) \neq 0$, so heißt f_M **Möbiustransformation**. Kreislinien oder Geraden in der komplexen Ebene bezeichnen wir als **Möbiuskreise**. Zeigen Sie:

(a) Jede Möbiustransformation f_M kann durch Komposition von Translationen $\tau_\alpha(z) = z + \alpha$, Drehstreckungen $\sigma_\beta(z) = \beta z$ und der Inversion $\iota(z) = \frac{1}{z}$ dargestellt werden. Hinweis: Schreiben Sie $f_M(z) = \frac{\gamma}{z-z_0} + \delta$.

(b) Jede Möbiustransformation bildet Möbiuskreise auf Möbiuskreise ab. Hinweis: Unter Verwendung von (a) genügt es die Behauptung für ι nur für Kreise $(x-x_0)^2 + y^2 = r^2$ und Geraden $x_0 + \mathrm{i}\mathbb{R}$ zu zeigen.

Präsenzaufgaben

P12.1. Satz von Rouché

(a) Wie lautet der Satz von Rouché?

(b) Wie viele Nullstellen (entsprechend der Vielfachheit gezählt) von $z^4 + 12z + 1$ befinden sich in $\{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < 4\}$?

P12.2. Die Cayley-Transformation

Wir betrachten die Cayley-Transformation $C(z) = \frac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}}$. Sie ist eine biholomorphe Abbildung von $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) > 0\}$ nach $B_1(0)$.

(a) C bildet $\mathbb{R}$ injektiv auf die Einheitskreislinie ab.

(b) Bestimmen Sie Radius und Mittelpunkt der Kreise, auf die $X + \mathrm{i}\mathbb{R}$, $X \neq 0$, durch C abgebildet wird.

Hausaufgabenabgabe: Dienstag, 12.7.2016, bis 16:00, Briefkasten, Keller FMI-Gebäude