



Hausaufgaben

H8.1. Anwendung des Identitätssatzes

Sei f eine ganze Funktion, die auf den Geraden $\text{Im}(z) = 0$ und $\text{Im}(z) = \pi$ reelle Werte annimmt. Zeigen Sie, dass f dann $2\pi i$ -periodisch ist, d.h., $f(z + 2\pi i) = f(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$.
HINWEIS: Man betrachte $z \mapsto \overline{f(\bar{z})}$. Warum ist diese Funktion ganz?

H8.2. Gebietstreue

Sei $f : B_2(0) \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph, mit $f(1) = 1$ und $f(-1) = -1$. Beweisen Sie: Es gibt ein $z \in B_2(0)$ und ein $\epsilon > 0$, so dass $f(z) = 1 - \epsilon$.

H8.3. Maximumprinzip und ein Nullstellenkriterium

Seien $U \subset \mathbb{C}$ ein beschränktes Gebiet, $f : \bar{U} \rightarrow \mathbb{C}$ stetig und holomorph auf U . Zeigen Sie:

- Für alle $z \in U$ gilt $|f(z)| \leq \max\{|f(w)| : w \in \partial U\}$.
- Gibt es ein $z \in U$ mit $|f(z)| < \min\{|f(w)| : w \in \partial U\}$, so besitzt f eine Nullstelle in U .
- Begründen Sie, dass $e^z = z$ eine Lösung mit $|z| < 2$ besitzt.
HINWEIS: Man plote $|e^z - z|$ für $|z| = 2$.

Präsenzaufgaben

P8.1. Der Identitätssatz

Seien $f, g : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph.

- Formulieren Sie den Identitätssatz mit eigenen Worten in einem Satz.
- Seien $f(z) = \text{Log}(z)$, $g(z) = \text{Log}(-z) + i\pi$ auf geeignetem Definitionsbereich. Zeigen Sie $f \neq g$. Auf welcher Menge stimmen die beiden Funktionen überein?
- Sei $U = \mathbb{C}$, $f(z) = g(z)$ für $z \in \mathbb{Z}$. Man gebe ein Beispiel für $f \neq g$.
- Ist $g(z) = z^2 \sin \frac{\pi}{z}$ ein Gegenbeispiel zum Identitätssatz, da doch $g(\frac{1}{n}) = 0$ für $n \in \mathbb{N}$?

P8.2. Variationen des Maximumprinzips

Sei U ein Gebiet, $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Zeigen Sie:

- Besitzt $|f|$ ein lokales Maximum, so ist f konstant.
- Besitzt $\text{Re}(f)$ ein lokales Maximum oder Minimum, so ist f konstant.
- Besitzt $\text{Im}(f)$ ein lokales Maximum oder Minimum, so ist f konstant.
- Besitzt $|f|$ ein isoliertes lokales Minimum, so ist dies eine Nullstelle von f .

Hausaufgabenabgabe: Dienstag, 14.6.2016, bis 16:00, Briefkasten, Keller FMI-Gebäude