Prof. Dr. R. König
Dr. M. Prähofer

Funktionentheorie
MA2006/MA2008

http://www-m5.ma.tum.de/Allgemeines/MA2006_2016S

Sommersemester 2016
Blatt 7
(31.5.2016)

Hausaufgaben

H7.1. Biholomorphe Deformation

Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph und $z_0 \in U$ eine k-fache Nullstelle der Funktion $z \mapsto f(z) - f(z_0)$. Zeigen Sie, dass es eine biholomorphe Abbildung Φ einer offenen Umgebung der 0 in eine offene Umgebung von z_0 gibt, so dass dort $f \circ \Phi(w) = f(z_0) + w^k$ gilt.

H7.2. Anwendung des Residuensatzes (Klausuraufgabe)

Zeigen Sie, dass

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^n} \mathrm{d}x = \frac{\frac{\pi}{n}}{\sin\frac{\pi}{n}}, \text{ für } n \in \mathbb{N},\ n \geq 2.$$

Hinweis: Betrachten Sie das Kurvenintegral von $\frac{1}{1+z^n}$ entlang des Randes der Menge $S := \{re^{\mathrm{i}\phi} \in \mathbb{C} \,|\, 0 \leq r \leq R,\ 0 \leq \phi \leq \frac{2\pi}{n}\}$ im Limes $R \to \infty$.

Präsenzaufgaben

P7.1. Vielfachheit von Nullstellen

Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $h : U \to \mathbb{C}$ holomorph, $z_0 \in U$ und $k, l \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie:

(a) z_0 ist genau dann eine l-fache Nullstelle von h, wenn es eine holomorphe Funktion $\tilde{h} : U \to \mathbb{C}$ gibt, mit $\tilde{h}(z_0) \neq 0$ und $h(z) = (z - z_0)^l \tilde{h}(z)$ für alle $z \in U$.

(b) Ist z_0 eine l-fache Nullstelle von h, so ist z_0 eine (kl)-fache Nullstelle von $f(z) = h(z)^k$.

P7.2. Holomorphe Wurzeln

Entscheiden Sie jeweils, ob es eine Funktion mit den folgenden Eigenschaften gibt:

(a) Eine holomorphe Funktion h, für die $h(z)^3 = z^3 - 1$ in einer Umgebung von $z = 0$ gilt.

(b) Eine holomorphe Funktion h, für die $h(z)^3 = z^3 - 1$ in einer Umgebung von $z = 1$ gilt.

(c) Eine holomorphe Funktion h, für die $h(z)^3 = e^z - 1 - z - \frac{z^2}{2}$ in einer Umgebung von $z = 0$ gilt. Wenn ja, bestimmen Sie die ersten zwei nichttrivialen Terme ihrer Potenzreihenentwicklung.

Hausaufgabenabgabe: Dienstag, 7.6.2016, bis 16:00, Briefkasten, Keller FMI-Gebäude