Hausaufgaben

H6.1. Potenzreihenentwicklungen

(a) Bestimmen Sie die Potenzreihenentwicklung von $z \mapsto \frac{1}{1+z^2}$ um $x \in \mathbb{R}$ und ihren Konvergenzradius.

(b) Bestimmen Sie die Potenzreihenentwicklung von $z \mapsto \frac{e^z}{1-tz}$, $t \in \mathbb{C}$, um 0 und ihren Konvergenzradius.

(c) Welchen Konvergenzradius hat die Potenzreihenentwicklung um 0 von $\tan z$? Bestimmen Sie die ersten drei von Null verschiedenen Koeffizienten.

H6.2. Mittelwertsatz, Liouville

(a) Sei $\overline{B_r(z_0)} \subset U \subset \mathbb{C}$ mit $r > 0$, U offen. Gibt es eine auf U holomorphe Funktion mit $|f(z)| \leq 1$ für $z \in \partial B_r(z_0)$ und $f(z_0) = 2\mathrm{i}$?

(b) Gibt es holomorphe Funktionen auf $\mathbb{C}$, deren Bild in $B_1(0)$ enthalten ist? Wenn ja, welche?

Präsenzaufgaben

P6.1. Langsam wachsende ganze Funktionen

Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph mit $f(z) = \mathcal{O}(|z|^k)$ für $|z| \to \infty$, $k \in \mathbb{N}_0$. Dann ist f ein Polynom, höchstens vom Grad k.

P6.2. Das Bild einer ganzen Funktion ist dicht in $\mathbb{C}$

Sei f eine ganze Funktion, die nicht konstant ist. Zeigen Sie, dass das Bild von f in $\mathbb{C}$ dicht liegt. Man gebe ein Beispiel mit $f(\mathbb{C}) \neq \mathbb{C}$.
Hinweis: Unter der Annahme $a \notin \overline{f(\mathbb{C})}$ betrachte man $z \mapsto \frac{1}{f(z)-a}$.

Hausaufgabenabgabe: Dienstag, 31.5.2016, bis 16:00, Briefkasten, Keller FMI-Gebäude