Prof. Dr. R. König
Dr. M. Prähofer

Funktionentheorie
MA2006/MA2008

Sommersemester 2016
Blatt 5
(10.5.2016)

http://www-m5.ma.tum.de/Allgemeines/MA2006_2016S

Hausaufgaben

H5.1. Homotopie

Zeigen Sie durch explizite Angabe einer geeigneten Homotopie oder durch Beweis der Nichtexistenz einer C^1-Homotopie, dass gilt:

(a) Die Wege $\gamma_1 = [-R, R]$ und $\gamma_2(t) = -R\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}$, $t \in [0, \pi]$ sind in $\mathbb{C}$ C^1-homotop (mit festen Endpunkten), nicht aber in $\mathbb{C} \setminus \{\mathrm{i}\}$, falls $R > 1$.

(b) Für $R > 0$, $|z_0| < R$, $r < R - |z_0|$ sind $\partial B_R(0)$ und $\partial B_r(z_0)$ frei C^1-homotop in $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ aber nicht in $\mathbb{C} \setminus \{w_0\}$ mit $w_0 = \frac{(|z_0|+r)+R}{2} \frac{z_0}{|z_0|}$.

(c) Ist $U \subset \mathbb{C}$ offen und sternförmig (bezüglich $z_0 \in U$), dann ist jeder geschlossene Weg in U nullhomotop.

H5.2. Berechnung einfacher Residuen

Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $z_0 \in U$. Sei $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph und p ein Polynom mit $p(z_0) = 0$, $p'(z_0) \neq 0$. Dann gilt

(a) $\mathrm{Res}_{z_0}(f) = 0$, (b) $\operatorname*{Res}_{z=z_0} \left(\frac{f(z)}{z-z_0}\right) = f(z_0)$, (c) $\operatorname*{Res}_{z=z_0} \left(\frac{f(z)}{p(z)}\right) = \frac{f(z_0)}{p'(z_0)}$.

H5.3. Integral über eine rationale Funktion

Sei $f(z) = \frac{1}{z^4+4}$.

(a) Berechnen Sie jeweils das Residuum bei den isolierten Singularitäten von f.

(b) Berechnen Sie $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$.

Präsenzaufgaben

P5.1. Homotopie

Besprechen Sie Aufgabe H5.1. an der Tafel.

P5.2. Anwendung des Residuensatzes

Berechnen Sie $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\mathrm{e}^{int}}{C-\mathrm{e}^{it}}\mathrm{d}t$ für $n \in \mathbb{N}$ und $|C| \neq 1$, in dem Sie das Integral in ein geschlossenes Wegintegral umwandeln.

P5.3. Nullstellen Zählen per Integral

Sei $p(z) = c(z - z_1)^{n_1} \cdots (z - z_k)^{n_k}$ mit $c \in \mathbb{C}^\times$ und $|z_1| < \cdots < |z_k|$. Für $j = 1, \ldots, k$ heißt $z_j \in \mathbb{C}$ eine n_j-fache Nullstelle von p. Berechnen und interpretieren Sie für $R > 0$ und $R \neq |z_j|$, $j = 1, \ldots, k$, das Integral $\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_{|z|=R} \frac{p'(z)}{p(z)}\mathrm{d}z$.

P5.4. Fourierintegrale mit Residuensatz

Berechnen Sie $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

Hausaufgabenabgabe: Dienstag, 24.5.2016, bis 16:00, Briefkasten, Keller FMI-Gebäude