TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Zentrum Mathematik

Prof. Dr. R. König
Dr. M. Prähofer

Funktionentheorie
MA2006/MA2008

Sommersemester 2016
Blatt 4
(3.5.2016)

`http://www-m5.ma.tum.de/Allgemeines/MA2006_2016S`

Hausaufgaben

H4.1. Die komplexe Errorfunktion und Fresnel-Integrale

Die komplexe Errorfunktion ist für $z \in \mathbb{C}$ definiert als

$$\operatorname{erf}(z) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{[0,z]} \mathrm{e}^{-w^2} \mathrm{d}w.$$

Hinweis: Für $x \in \mathbb{R}$ hat $\operatorname{erf}(x)$ die bekannte Asymptotik $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \operatorname{erf}(x) = \pm 1$.

(a) Skizzieren Sie die Linien konstanten Betrags und konstanter Phase von $\mathbb{C} \ni z \mapsto \mathrm{e}^{-z^2}$.

(b) Warum ist erf holomorph auf $\mathbb{C}$? Man gebe $\operatorname{erf}(z)$ als Potenzreihe an und zeige $\operatorname{erf}(-z) = -\operatorname{erf}(z)$ und $\operatorname{erf}(\overline{z}) = \overline{\operatorname{erf}(z)}$.

(c) Man zeige $\int\limits_{\gamma_R} \mathrm{e}^{-w^2} \mathrm{d}w \to 0$ für $R \to \infty$, wobei $\gamma_R(t) = R\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, $t \in [0, \frac{\pi}{4}]$.

Hinweis: Man benutze an geeigneter Stelle, dass $\cos 2t \geq 1 - \frac{4}{\pi} t$ für $t \in [0, \frac{\pi}{4}]$.

(d) Zeigen Sie, dass $\lim\limits_{R \to \infty} \operatorname{erf}(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}) = 1$ ist. Hinweis: durch Integration entlang der reellen Achse und dann entlang γ_R.

(e) Berechnen Sie $\int\limits_0^\infty \cos(x^2) \mathrm{d}x$ und $\int\limits_0^\infty \sin(x^2) \mathrm{d}x$ unter Benutzung von (d).

Präsenzaufgaben

P4.1. Logarithmusreihe

Zeigen Sie, dass $\operatorname{Log}(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} \mp \cdots$ für $|z| < 1$.

P4.2. Unabhängigkeit des Wegintegrals vom Radius

(a) Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph. Für $z_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$, sei die punktierte Kreisscheibe $\{z \in \mathbb{C} \,|\, 0 < |z - z_0| < r\} \subset U$. Dann gilt für alle $\rho \in]0, r[$, dass

$$\oint\limits_{|z-z_0|=\rho} f(z) \mathrm{d}z = \lim_{\epsilon \searrow 0} \oint\limits_{|z-z_0|=\epsilon} f(z) \mathrm{d}z \in \mathbb{C}.$$

Hinweis: Vergleichen Sie das Wegintegral für zwei verschiedene Radien mit Hilfe des Integrallemmas für Bilder von Rechtecken.

(b) Illustrieren Sie (a) mit einem Beispiel, für das $\lim\limits_{\epsilon \searrow 0} \oint\limits_{|z-z_0|=\epsilon} f(z) \mathrm{d}z \neq 0$ ist.

Hausaufgabenabgabe: Dienstag, 10.5.2016, bis 16:00, Briefkasten, Keller FMI-Gebäude