Prof. Dr. R. König
Dr. M. Prähofer

Funktionentheorie
MA2006/MA2008

Sommersemester 2016
Blatt 3
(26.4.2016)

http://www-m5.ma.tum.de/Allgemeines/MA2006_2016S

Hausaufgaben

H3.1. Komplexe Wegintegrale

Berechnen Sie die folgenden Wegintegrale mit dem Weg $\gamma(t) = t + \mathrm{i}t^\alpha$, $t \in [0,1]$, mit $\alpha > 0$ und dem Rechteck $R = [a,b] + \mathrm{i}[c,d] = \{x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C} \mid x \in [a,b], y \in [c,d]\}$.

(a) $\int_\gamma \overline{z}\,\mathrm{d}z$ (b) $\int_\gamma z\,\mathrm{d}z$ (c) $\frac{1}{2\mathrm{i}} \oint_{\partial R} \overline{z}\,\mathrm{d}z$ (d) $\frac{1}{2\mathrm{i}} \oint_{\partial R} z\,\mathrm{d}z$

H3.2. Fouriertransformierte der Gaußkurve (Klausuraufgabe)

(a) Warum hat $z \mapsto \mathrm{e}^{-z^2}$ eine Stammfunktion auf $\mathbb{C}$?

(b) Zeigen Sie durch Integration entlang des Randes von $Q = [-R,R] + \mathrm{i}[0,Y]$, dass für alle $Y \geq 0$ gilt: $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-(x+\mathrm{i}Y)^2}\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$.

(c) Berechnen Sie mit Hilfe von (b) das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x$ für $k \in \mathbb{R}$.

Hinweis: zu (c): $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$ wird als bekannt vorausgesetzt.

Präsenzaufgaben

P3.1. Wegintegrale

Berechnen Sie

(a) $\oint_{|z|=R} z^n\mathrm{d}z$ für $R > 0$, $n \in \mathbb{Z}$,

(b) $\oint_{|z|=R} \overline{z}^n\mathrm{d}z$ für $R > 0$, $n \in \mathbb{Z}$,

(c) $\int_{[1,3]} z\mathrm{e}^{z^2}\mathrm{d}z$,

(d) $\int_\gamma z\mathrm{e}^{z^2}\mathrm{d}z$ für $\gamma(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + 2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}t}$, $t \in [0,\pi]$.

P3.2. Standardabschätzung

Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ stetig, $z_0 \in U$. Zeigen Sie

(a) $\lim_{\epsilon \searrow 0} \oint_{|z-z_0|=\epsilon} f(z)\mathrm{d}z = 0$.

(b) Ist f holomorph, dann gilt $\lim_{\epsilon \searrow 0} \oint_{|z-z_0|=\epsilon} \frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}f(z_0)$.

Hausaufgabenabgabe: Dienstag, 3.5.2016, bis 16:00, Briefkasten, Keller FMI-Gebäude