TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Zentrum Mathematik

PROF. DR. M. WOLF
DR. M. PRÄHOFER

Funktionentheorie
MA2006/MA2008

Sommersemester 2015
Blatt 8
(9.6.2015)

http://www-m5.ma.tum.de/Allgemeines/MA2006_2015S

Tutoraufgaben

T8.1. Nullstellen und Pole

(a) Für $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph heißt $z_0 \in U$ eine k-fache Nullstelle von f, wenn es eine holomorphe Funktion $g : U \to \mathbb{C}$ gibt mit $g(z_0) \neq 0$ und $f(z) = (z - z_0)^k g(z)$ für alle $z \in U \setminus \{z_0\}$. Was kann man in diesem Fall über die Ableitungen von f in z_0 aussagen?

(b) Seien $f, g : U \to \mathbb{C}$ holomorph und sei $z_0 \in U$ eine k-fache Nullstelle von f und eine l-fache Nullstelle von g, $k, l \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $\frac{f}{g}$ in z_0 entweder eine $(k-l)$-fache Nullstelle besitzt (falls $k > l$), eine hebbare Singularität (falls $k = l$)) oder einen Pol $(l-k)$-ter Ordnung (falls $l > k$).

(c) Charakterisieren Sie die Singularitäten von $z \mapsto \frac{z}{e^z - 1}$.
Welchen Konvergenzradius hat die Taylorentwicklung $\frac{z}{e^z-1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{z^n}{n!}$?
BEMERKUNG: Die B_n sind die sogenannten Bernoulli-Zahlen,
$B_0 = 1$, $B_1 = -\frac{1}{2}$, $B_2 = \frac{1}{6}$, $B_3 = 0$, $B_4 = -\frac{1}{30}$, $B_5 = 0$, $B_6 = \frac{1}{42}$, $B_7 = 0$, $B_8 = -\frac{1}{30}$.
Was können Sie zu der Vermutung, dass die B_n beschränkt sind, sagen?

Hausaufgaben

H8.1. Isolierte Singularitäten

Klassifizieren Sie die isolierten Singularitäten der folgenden Funktionen:

(a) $f(z) = \frac{z-1}{(z^4-1)^2}$, (b) $f(z) = \frac{z}{\sin z}$, (c) $f(z) = e^{-z^{-3}}$, (d) $f(z) = \frac{1}{\sin \frac{1}{z}}$.

H8.2. Vergleich ganzer Funktionen

Seien $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph mit $|f(z)| \leq |g(z)|$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Dann gibt es ein $c \in \mathbb{C}$ mit $|c| \leq 1$, so dass $f = cg$.

Hausaufgabenabgabe: Dienstag, 16.6.2015, bis 16:00, Briefkasten, Keller FMI-Gebäude