TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Zentrum Mathematik

Prof. Dr. M. Wolf
Dr. M. Prähofer

Funktionentheorie
MA2006/MA2008

http://www-m5.ma.tum.de/Allgemeines/MA2006_2015S

Sommersemester 2015
Blatt 7
(29.5.2015)

Tutoraufgaben

T7.1. Mittelwertsatz, Liouville

(a) Sei $\overline{B_r(z_0)} \subseteq U \subseteq \mathbb{C}$ mit $r > 0$, U offen. Gibt es eine auf U holomorphe Funktion mit $|f(z)| \leq 1$ für $z \in \partial B_r(z_0)$ und $f(z_0) = 2\mathrm{i}$?

(b) Gibt es holomorphe Funktionen auf $\mathbb{C}$, deren Bild in $B_1(0)$ enthalten ist? Wenn ja, welche?

T7.2. Der Identitätssatz

Seien $f, g : U \to \mathbb{C}$ holomorph.

(a) Formulieren Sie den Identitätssatz mit eigenen Worten in einem Satz.

(b) Sei $f = \log$, $g(z) = \log(-z) + \mathrm{i}\pi$. Zeigen Sie $f \neq g$. Auf welcher Menge stimmen die beiden Funktionen überein?

(c) Sei $U = \mathbb{C}$, $f(z) = g(z)$ für $z \in \mathbb{Z}$. Man gebe ein Beispiel für $f \neq g$.

(d) Ist $g(z) = z^2 \sin \frac{\pi}{z}$ ein Gegenbeispiel zum Identitätssatz, da doch $g(\frac{1}{n}) = 0$ für $n \in \mathbb{N}$?

T7.3. Verallgemeinertes Nullstellenkriterium

(a) Zeigen Sie: Sei $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph auf dem beschränkten Gebiet $U \subseteq \mathbb{C}$ und stetig fortsetzbar auf $\overline{U}$. Gibt es ein $z_0 \in U$ mit $|f(z_0)| < \min\{|f(z)| \mid z \in \partial U\}$, so besitzt f eine Nullstelle in U. Hinweis: Maximumsprinzip für $\frac{1}{f}$.

(b) Begründen Sie, dass $\mathrm{e}^z = z$ eine Lösung mit $|z| < 2$ besitzt. Hinweis: Man plotte $|\mathrm{e}^z - z|$ für $|z| = 2$

Hausaufgaben

H7.1. Anwendungen des Identitätssatzes

Gibt es im Ursprung holomorphe Funktionen f, für die jeweils für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

(a) $f(\frac{1}{n}) = (-1)^n \frac{1}{n}$, (b) $f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n^2-2}$, (c) $f^{(n)}(0) = (n!)^2$?

H7.2. Anwendungen des Identitätssatzes

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Folge komplexer Zahlen mit $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty$ und $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{k^n} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{k^2}}$ für $k \in \mathbb{N}$. Wie lautet a_{2014}?

H7.3. Gebietstreue

Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ reelle Konstanten mit $a^2 + b^2 > 0$. Bestimmen Sie alle auf U holomorphen Funktionen mit der Eigenschaft $a \operatorname{Re}(f) + b \operatorname{Im}(f) + c = 0$.

Hausaufgabenabgabe: Dienstag, 9.6.2015, bis 16:00, Briefkasten, Keller FMI-Gebäude