



Hausaufgaben

H4.1. Kurvenintegrale

Berechnen sie $\int_{\gamma} z e^{\pi z^2} dz$, wobei γ die Kurve von 0 nach $1 + i$ entlang eines Viertelkreises mit Mittelpunkt i ist.

H4.2. Hauptzweig des komplexen Arcustangens

Der komplexe Arcustangens wird als die Stammfunktion von $z \mapsto \frac{1}{z^2+1}$ auf dem Gebiet $\mathbb{C} \setminus i(\mathbb{R} \setminus]-1, 1])$ mit $\arctan(0) = 0$ definiert.

- Drücken Sie $\arctan(z)$ durch den komplexen Logarithmus aus.
HINWEIS: Partialbruchzerlegung. $\log(\pm iz)$ ist Stammfunktion von $\frac{1}{z}$ auf der nach oben/unten geschlitzten Ebene.
- Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil von $\arctan(x + iy)$ für $|y| < 1$.
- Skizzieren Sie die Höhenlinien von Real- und Imaginärteil des Arcustangens.
HINWEIS: Es sind Kreissegmente, deren Mittelpunkt und Radius Sie bestimmen sollen.
 $\arctan(x) + \arctan(y) = \arctan \frac{x+y}{1-xy} + C$, wobei $C = 0$ für $xy < 1$ und $C = \operatorname{sgn}(x)\pi$ für $xy > 1$.

Tutoraufgaben

T4.1. Reelle Asymptotik des Integralsinus

Wir wollen $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi$ beweisen. Dazu sei $\gamma_r(t) = r e^{it}$, $t \in [0, \pi]$ für $r > 0$.

- Skizzieren Sie den Integranden. Warum gilt $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\int_{-R}^{-\frac{1}{R}} \frac{\sin x}{x} dx + \int_{\frac{1}{R}}^R \frac{\sin x}{x} dx \right)$?
- Zeigen Sie $\int_{\gamma_r} \frac{e^{iz}}{z} dz \rightarrow 0$ für $r \rightarrow \infty$. HINWEIS: z.B. majorisierte Konvergenz.
- Zeigen Sie $\int_{\gamma_r} \frac{e^{iz}}{z} dz \rightarrow i\pi$ für $r \rightarrow 0$. HINWEIS: $\frac{e^{iz}}{z} = \frac{1}{z} + f(z)$, mit f ganz.
- Durch Integration entlang des Randes von $G = \{z \in \mathbb{C} \mid \frac{1}{R} < |z| < R, \operatorname{Im}(z) > 0\}$ zeige man $\lim_{R \rightarrow \infty} \left(\int_{-R}^{-\frac{1}{R}} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{\frac{1}{R}}^R \frac{e^{ix}}{x} dx \right) = i\pi$ und folgere $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi$.

Hausaufgabenabgabe: Dienstag, 12.5.2015, bis 16:00, Briefkasten, Keller FMI-Gebäude