TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Zentrum Mathematik

Prof. Dr. M. Wolf
Dr. M. Prähofer

Funktionentheorie
MA2006/MA2008

Sommersemester 2015
Blatt 3
(28.4.2015)

http://www-m5.ma.tum.de/Allgemeines/MA2006_2015S

Hausaufgaben

H3.1. Stammfunktionen holomorpher Funktionen

Geben Sie jeweils eine holomorphe Funktion $F : U \to \mathbb{C}$ mit maximalem Definitionsbereich an, so dass

(a) $F'(z) = z^n$, $n \in \mathbb{N}_0$,

(b) $F'(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$,

(c) $F'(z) = \frac{1}{z^{n+1}}$, $n \in \mathbb{N}$,

(d) $F'(z) = \sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n z^{-n}$,

wobei $R := (\limsup\limits_n \sqrt[n]{|a_n|})^{-1} > 0$.

H3.2. Die komplexe Errorfunktion und Fresnel-Integrale

Die komplexe Errorfunktion ist für $z \in \mathbb{C}$ definiert als

$$\operatorname{erf}(z) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_\gamma e^{-w^2} dw, \quad \gamma(t) = tz, \ t \in [0, 1].$$

Hinweis: Für $x \in \mathbb{R}$ hat $\operatorname{erf}(x)$ die bekannte Asymptotik $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \operatorname{erf}(x) = \pm 1$.

(a) Skizzieren Sie die Linien konstanten Betrags und konstanter Phase von $\mathbb{C} \ni z \mapsto e^{-z^2}$.

(b) Warum ist erf holomorph auf $\mathbb{C}$? Man gebe $\operatorname{erf}(z)$ als Potenzreihe an und zeige $\operatorname{erf}(-z) = -\operatorname{erf}(z)$ und $\operatorname{erf}(\overline{z}) = \overline{\operatorname{erf}(z)}$.

(c) Man zeige $\int\limits_{\gamma_R} e^{-w^2} dw \to 0$ für $R \to \infty$, wobei $\gamma_R(t) = Re^{it}$, $t \in [0, \frac{\pi}{4}]$.
Hinweis: Man benutze an geeigneter Stelle $\cos 2t \geq 1 - \frac{4}{\pi} t$ für $t \in [0, \frac{\pi}{4}]$.

(d) Zeigen Sie, dass $\lim\limits_{t\to\infty} \operatorname{erf}(te^{i\frac{\pi}{4}}) = 1$ ist. Hinweis: durch Integration entlang der reellen Achse und dann entlang γ_R.

(e) Berechnen Sie $\int\limits_0^\infty \cos x^2 dx$ und $\int\limits_0^\infty \sin x^2 dx$ unter Benutzung von (d).

Tutoraufgaben

T3.1. Kurvenintegrale

(a) Berechnen Sie $\oint\limits_{|z|=R} z^n dz$ für $R > 0$, $n \in \mathbb{Z}$.

(b) Berechnen Sie $\oint\limits_{|z|=R} \overline{z}^n dz$ für $R > 0$, $n \in \mathbb{Z}$.

(c) Warum kann $\frac{1}{z}$ auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ keine Stammfunktion haben?

Hausaufgabenabgabe: Dienstag, 5.5.2015, bis 16:00, Briefkasten, Keller FMI-Gebäude