Prof. Dr. M. Wolf
Dr. M. Prähofer

**Funktionentheorie**
**MA2006/MA2008**

Sommersemester 2015
Blatt 1
(13.4.2015)
http://www-m5.ma.tum.de/Allgemeines/MA2006_2015S

## Hausaufgaben

### H1.1. Nullstellen von Polynomen und Linearfaktorzerlegung

Bestimmen Sie für die folgenden komplexen Polynome in $z$ jeweils alle Nullstellen und eine Zerlegung in Linearfaktoren, wobei $n \in \mathbb{N}$, $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$:

(a) $z^n - c$ (b) $1 + z + \cdots + z^n$ (c) $\binom{z}{n}$

Hinweise: (a) Polarform, (b) geometrische Summenformel, (c) $\binom{z}{0} = 1$, $\binom{z}{n+1} = \frac{z-n}{n+1}\binom{z}{n}$.

### H1.2. Exponential- und trigonometische Funktionen

Zeigen Sie die Gültigkeit der folgenden Aussagen für alle $w, z \in \mathbb{C}$:

(a) $\mathrm{e}^z\mathrm{e}^w = \mathrm{e}^{z+w}$ (mit Cauchy-Produktformel)
(b) $\sin z = \cos(z - \frac{\pi}{2})$, $\cos \mathrm{i}z = \cosh z$, $\sin \mathrm{i}z = \mathrm{i}\sinh z$ (mit Euler-Formel)
(c) Die Additionstheoreme für sin und cos (mit Euler-Formel)
(d) $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$
(e) Die Exponentialfunktion hat keine Nullstellen.
(f) Alle Nullstellen des Sinus liegen auf der rellen Achse.

Hinweis: Alle Eigenschaften reller Funktionen werden als bekannt vorausgesetzt.

## Tutoraufgaben

### T1.1. Konvergenzbereiche

Bestimmen Sie das Innere der Menge aller $z \in \mathbb{C}$, für die die folgenden Reihen absolut konvergieren, wobei $\alpha \in \mathbb{C}$ und $a : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$:

(a) $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ (b) $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n$ (c) $f(z) = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n$

### T1.2. Potenzreihen sind analytisch

(a) Geben Sie für eine Doppelfolge $c : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \to \mathbb{C}$ eine hinreichende Bedingung an, dass $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} c_{nk} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \sum\limits_{n=k}^{\infty} c_{nk}$ gilt.

(b) Sei nun $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ mit komplexen Koeffizienten und Konvergenzradius $R > 0$. Sei weiter $z_0 \in \mathbb{C}$ mit $|z_0| < R$. Man zeige, dass für $|z - z_0| < R - |z_0|$ gilt: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} |a_n|\,|z_0|^{n-k}|z - z_0|^k < \infty$.

(c) Bestimmen Sie eine Folge $(b_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$, so dass $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k(z-z_0)^k$ für $|z-z_0| < R-|z_0|$.

Hinweis: Man setze in der Potenzreihe $z{=}(z-z_0)+z_0$. Ergebnis: $b_k = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{n} a_{n+k} z_0^n$

**Hausaufgabenabgabe:** Dienstag, 21.4.2015, bis 16:00, Briefkasten, Keller FMI-Gebäude
Abgabe zu zweit. Schreiben Sie bitte Blattnummer und Ihre Tutorgruppe deutlich auf Ihre Lösungen.