....
Note

Name

Vorname

Matrikelnummer

Studiengang (Hauptfach)

Fachrichtung (Nebenfach)

Unterschrift der Kandidatin/des Kandidaten

	I	II
1		
2		
3		
4		
5		
Σ		

I ....
Erstkorrektur

II ....
Zweitkorrektur

TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Fakultät für Mathematik

Wiederholungsklausur
Funktionentheorie
MA2006 und MA2008

Prof. Dr. M. Wolf

22. September 2014, 13:00 – 14:00 Uhr

Hörsaal: .... Reihe: .... Platz: ....

Hinweise:

Überprüfen Sie die Vollständigkeit der Angabe: **5** Aufgaben

Bearbeitungszeit: **60** min

Hilfsmittel: Ein selbsterstelltes Din A4 Blatt

Nur von der Aufsicht auszufüllen:

Hörsaal verlassen von .... bis ....

Vorzeitig abgegeben um ....

Besondere Bemerkungen:

1. **Cauchy-Riemann Differentialgleichungen** **[10 Punkte]**

Es sei $f(x+\mathrm{i}y) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$ eine ganze Funktion mit Imaginärteil $v(x,y) = ax^2 + by^2$ und einer Nullstelle bei $1+\mathrm{i}$. Was folgt daraus für $a, b \in \mathbb{R}$ und $u(x,y)$?

2. **Residuen** **[12 Punkte]**

Sei $f(z) = \frac{1}{z^n(1-z)^2}$, $n \in \mathbb{N}$.

(a) Geben Sie alle Singularitäten von f an und klassifizieren Sie sie.

(b) Welchen Wert hat das Residuum von f bei $z = 1$?

(c) Bestimmen Sie Haupt- und Nebenteil von f in einer Umgebung von $z = 0$.
Hinweis: $\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)z^k$ für $|z| < 1$.

(d) Welchen Wert hat das Residuum von f bei $z = 0$.

(e) Welchen Konvergenzradius hat der Nebenteil der Laurent-Reihe von f um $z = 0$?

3. **Cauchy-Integralformel** **[8 Punkte]**

Es sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Es gebe ein $n \in \mathbb{N}$, ein $C > 0$ und ein $R > 0$, so dass $|f(z)| \leq C|z|^n$ für alle $|z| > R$. Beweisen Sie, dass f ein Polynom ist.

4. **Anwendung des Residuensatzes** **[14 Punkte]**

Zeigen Sie, dass

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^n} \mathrm{d}x = \frac{\frac{\pi}{n}}{\sin\frac{\pi}{n}}, \text{ für } n \in \mathbb{N},\ n \geq 2.$$

Hinweis: Betrachten Sie das Kurvenintegral von $\frac{1}{1+z^n}$ entlang des Randes der Menge $S := \{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} \in \mathbb{C} \,|\, 0 \leq r \leq R,\ 0 \leq \phi \leq \frac{2\pi}{n}\}$ im Limes $R \to \infty$.

5. **Cauchyintegralsatz und Satz von Rouché** **[10 Punkte]**

Zeigen Sie, dass

$$\int\limits_{|z|=2} \frac{1}{z^5 + 12z^2 - \mathrm{i}} \mathrm{d}z = \int\limits_{|z|=1} \frac{1}{z^5 + 12z^2 - \mathrm{i}} \mathrm{d}z.$$