....
Note

Name

Vorname

Matrikelnummer

Studiengang (Hauptfach)

Fachrichtung (Nebenfach)

Unterschrift der Kandidatin/des Kandidaten

	I	II
1		
2		
3		
4		
5		
6		
$\sum$		

I ....
Erstkorrektur

II ....
Zweitkorrektur

TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Fakultät für Mathematik

Klausur
Funktionentheorie
MA2006 und MA2008

Prof. Dr. M. Wolf

23. Juli 2014, 15:00 – 16:00 Uhr

Hörsaal: .... Reihe: .... Platz: ....

Hinweise:

Überprüfen Sie die Vollständigkeit der Angabe: **6** Aufgaben

Bearbeitungszeit: **60** min

Hilfsmittel: Ein selbsterstelltes Din A4 Blatt

Bei Multiple-Choice-Aufgaben sind **genau** die zutreffenden Aussagen anzukreuzen.
Bei Aufgaben mit Kästchen werden nur die Resultate **in diesen Kästchen** berücksichtigt.

Nur von der Aufsicht auszufüllen:

Hörsaal verlassen von .... bis ....

Vorzeitig abgegeben um ....

Besondere Bemerkungen:

1. **Komplexe Kurvenintegrale** **[9 Punkte]**
Sei $R > 2$ und $\gamma(t) = R\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, $t \in [0, 2\pi]$. Berechnen Sie die Werte der folgenden Kurvenintegrale und begründen Sie die wesentlichen Schritte:

(a) $\int\limits_{\gamma} \overline{z}^n \mathrm{d}z$, $n \in \mathbb{Z}$,

(b) $\int\limits_{\gamma} \mathrm{e}^{z \sin z} \mathrm{d}z$,

(c) $\displaystyle\int\limits_{\gamma} \frac{z\mathrm{e}^{\pi z^3}}{z^2+1} \mathrm{d}z$.

2. **Residuen** **[9 Punkte]**

Sei $f(z) = \frac{z^2-2z}{\sin \pi z}$.

(a) f hat bei $0 \in \mathbb{C}$

☐ keine Singularität, ☐ eine hebbare Singularität, ☐ einen Pol erster Ordnung,
☐ einen Pol höherer Ordnung, ☐ eine wesentliche Singularität.

(b) Bestimmen Sie das Residuum von f bei $z = 1$.

$\mathrm{Res}_1(f) =$

(c) Wie lautet der Hauptteil $H(z)$ der Laurentreihenentwicklung von f in einer Umgebung von $z = 1$?

$H(z) =$

(d) Auf welcher Menge $B \subseteq \mathbb{C}$ konvergiert die Laurentreihenentwicklung von f um den Entwicklungspunkt 1 absolut?

$B =$

(e) Welchen Wert hat das komplexe Wegintegral $\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z$ entlang der Kurve $\gamma : [0, 8\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = 1 + \mathrm{i} + \frac{\pi}{2}e^{-\mathrm{i}t}$?

$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z =$

3. **Wurzeln holomorpher Funktionen** **[6 Punkte]**

Beantworten Sie die folgenden Fragen und begründen Sie Ihre Antwort:

(a) Gibt es eine holomorphe Funktion f, für die $f(z)^3 = z^3 - 1$ für $z \in B_1(0)$ gilt?

(b) Gibt es eine holomorphe Funktion f, für die $f(z)^3 = z^3 - 1$ für $z \in B_1(1)$ gilt?

Hinweis: zu (a): Hauptzweig des Logarithmus, zu (b): Ordnung der Nullstelle bei $z = 1$.

4. **Satz von Liouville und Identitätssatz** **[8 Punkte]**

Es sei $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Beweisen Sie:

(a) Gilt $|f(z)| < 1$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, so ist f konstant.

(b) Gilt $f(z) = f(z^2)$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, so ist f konstant.

Hinweis: zu (a): 0 ist isolierte Singularität; zu (b): 1 ist ein Häufungspunkt in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

5. **Gaußintegrale** **[12 Punkte]**

(a) Zeigen Sie durch Integration entlang des Randes von $Q = \{x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C} \,|\, x \in [-R, R],\, y \in [0, Y]\}$, dass für alle $Y \geq 0$ gilt: $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-(x+\mathrm{i}Y)^2} \mathrm{d}x = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2} \mathrm{d}x$.

(b) Berechnen Sie mit Hilfe von (a) das Integral $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2 - \mathrm{i}kx} \mathrm{d}x$ für $k \geq 0$.

HINWEIS: zu (b): $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2} \mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$ wird als bekannt vorausgesetzt.

6. **Cauchy-Integralformel und Satz von Rouché** **[8 Punkte]**

Sei $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph mit $|h(z) - z^2| < 1$ falls $|z| = 1$.

(a) Beweisen Sie, dass $|h'(0)| \leq 2$.

(b) Beweisen Sie, dass h genau zwei Nullstellen in der Menge $\{z \in \mathbb{C} \,|, |z| \leq 1\}$ besitzt.