



Tutorübungen: Wiederholung des Stoffs, Fragen

Hausaufgaben

H13.1. Residuenkalkül (Klausuraufgabe)

Sei $f(z) = \frac{e^{\alpha z}}{1+e^z}$ mit $0 < \alpha < 1$.

(a) Berechnen Sie das Residuum von $f(z)$ bei $z = i\pi$.

(b) Welchen Wert hat $\int_{\partial Q_R} f(z) dz$ für $Q_R := \{x + iy \in \mathbb{C} \mid x \in [-R, R], y \in [0, 2\pi]\}$, $R > 0$?

(c) Zeigen Sie, dass $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\alpha x}}{1+e^x} dx = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}$.

HINWEIS: Benutzen Sie, dass $|f(x + iy)| \leq \frac{e^{\alpha x}}{|1-e^x|} \rightarrow 0$ für $|x| \rightarrow \infty$.

H13.2. Die Partialbruchzerlegung des Kotangens

Sei $f(z) = \frac{\pi \cot(\pi z)}{z^2 - z_0^2}$ wobei $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$.

(a) Bestimmen Sie alle Residuen von f .

(b) Zeigen Sie $\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\partial A_N} f(z) dz = 0$, wobei $A_N = [-N - \frac{1}{2}, N + \frac{1}{2}]^2$, $N \in \mathbb{N}$.

(c) Zeigen Sie mit Hilfe des Residuensatzes, dass $\pi \cot(\pi z_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N \frac{1}{z_0 - n}$.

HINWEIS zu (b): Nach H1.3(g) ist der Kotangens auf $\bigcup_{N=1}^{\infty} A_N$ beschränkt (z.B. durch $\frac{11}{10}$).

H13.3. Satz von Rouché (Staatsexamensaufgabe)

Bestimmen Sie die Anzahl der Nullstellen des Polynoms $p(z) = 2z^5 - 6z^2 + z + 1$ im Ringgebiet $1 \leq |z| \leq 2$. Sind darunter auch reelle Nullstellen?

Hausaufgabenabgabe: Dienstag, 8.7.2014, bis 16:00, Briefkasten, Keller FMI-Gebäude
(Abgabe ist freiwillig)