Prof. Dr. M. Wolf
Dr. M. Prähofer

Funktionentheorie
MA2006/MA2008

`http://www-m5.ma.tum.de/Allgemeines/MA2006_2014S`

Sommersemester 2014
Blatt 11
(17.6.2014)

Tutoraufgaben

T11.1. Residuen

Geben Sie jeweils alle Residuen an:

(a) $\frac{1}{z^4-1}$, (b) $\frac{e^{iz}}{z^4-1}$ (c) $\frac{1}{z^5-z}$, (d) $\frac{z^2}{(z^2+1)^2}$

(e) $\cot z$, (f) $\frac{e^{-z^2}}{z-2}$, (g) $\sin \frac{1}{z}$, (h) $\frac{1-\cos(2z)}{z^5}$,

Hausaufgaben

H11.1. Laurentreihen

Bestimmen Sie jeweils die Laurentreihen mit Haupt- und Nebenteil von

(a) $\frac{\sin z}{z}$ um $z = 0$, (b) $\frac{\mathrm{e}^z-z-1}{z^4}$ um $z = 0$, (c) $\frac{\mathrm{e}^z-\mathrm{e}}{(z-1)^4}$ um $z = 1$,

H11.2. Laurentreihenentwicklung

Bestimmen Sie zu $f(z) = \frac{z}{(z-1)(z-2)}$

(a) die Laurentreihenentwicklung auf $K_{(0,1)}(1)$,
(b) die Laurentreihenentwicklung auf $K_{(1,\infty)}(1)$,
(c) den Wert von $\int\limits_\gamma f(z)\mathrm{d}z$ für $\gamma(t) = 3\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}t}$, $t \in [0, 1]$.

H11.3. Die Besselfunktionen

Für jedes $z \in \mathbb{C}$ besitzt die Funktion $f_z(w) = \mathrm{e}^{\frac{z}{2}(w-\frac{1}{w})}$ auf $\mathbb{C}^\times$ eine Laurententwicklung

$$\mathrm{e}^{\frac{z}{2}(w-\frac{1}{w})} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} J_n(z)w^n$$

$J_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ heißt die n-te Besselfunktion. Man zeige:

(a) $J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z)$ und $J_n(-z) = (-1)^n J_n(z)$
(b) Für $n \geq 0$ ist $J_n(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+n}$.
(c) $J_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \cos(z \sin t - nt)\mathrm{d}t$.

Skizzieren Sie die ersten paar Besselfunktionen. Hinweis: Man benutze die Integraldarstellung der Laurentkoeffizienten; in (b) durch geeignetes Einsetzen von Exponentialreihen; in (c) durch Auswerten entlang der Einheitskreislinie.

Hausaufgabenabgabe: Dienstag, 24.6.2014, bis 16:00, Briefkasten, Keller FMI-Gebäude