PROF. DR. M. WOLF
DR. M. PRÄHOFER

Funktionentheorie
MA2006/MA2008

Sommersemester 2014
Blatt 9
(3.6.2014)

http://www-m5.ma.tum.de/Allgemeines/MA2006_2014S

Tutoraufgaben

T9.1. Laurentreihenentwicklung (verschoben auf Blatt 10)

Geben Sie alle Laurentreihenentwicklungen von $\frac{1}{z-z_0}$ um den Punkt 0 an, wobei $z_0 \in \mathbb{C}$.

T9.2. Der Hauptteil eines einfachen Pols

Seien f, g holomorph in einer Umgebung von $z_0 \in \mathbb{C}$ und habe g eine einfache Nullstelle bei z_0. Bestimmen Sie c_{-1}, so dass $z \mapsto \frac{f(z)}{g(z)} - \frac{c_{-1}}{z-z_0}$ eine hebbare Singularität bei z_0 besitzt. Wie lauten Haupt- und Nebenteil der Laurententwicklung von $\frac{f}{g}$ in einer punktierten Umgebung von z_0?

T9.3. Der Hauptteil eines mehrfachen Pols

Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und f holomorph auf $U \setminus \{z_0\}$ mit einem k-fachen Pol bei z_0. Zeigen Sie: es gibt eindeutige Koeffizienten $c_{-j} \in \mathbb{C}$, $j \in \{1, \ldots, k\}$, so dass $N(z) := f(z) - \sum_{j=1}^{k} \frac{c_{-j}}{(z-z_0)^j}$ eine hebbare Singularität bei z_0 besitzt. Zeigen Sie: $c_{-j} = \frac{1}{(k-j)!} \frac{\mathrm{d}^{k-j}}{\mathrm{d}z^{k-j}} (z-z_0)^k f(z)|_{z=z_0}$.
BEMERKUNG: $N(z)$ heißt der Nebenteil von f in z_0 und $H(z) := f(z) - N(z)$ heißt der Hauptteil von f in z_0.

Hausaufgaben

H9.1. Nullstellen und Pole

(a) Für $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph heißt $z_0 \in U$ eine k-fache Nullstelle von f, wenn es eine holomorphe Funktion $g : U \to \mathbb{C}$ gibt mit $g(z_0) \neq 0$ und $f(z) = (z-z_0)^k g(z)$ für alle $z \in U \setminus \{z_0\}$. Was kann man in diesem Fall über die Ableitungen von f in z_0 aussagen?

(b) Seien $f, g : U \to \mathbb{C}$ holomorph und sei $z_0 \in U$ eine k-fache Nullstelle von f und eine l-fache Nullstelle von g, $k, l \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $\frac{f}{g}$ in z_0 entweder eine $(k-l)$-fache Nullstelle besitzt (falls $k > l$), eine hebbare Singularität (falls $k = l$)) oder einen Pol $(l-k)$-ter Ordnung (falls $l > k$).

(c) Charakterisieren Sie die Singularitäten von $z \mapsto \frac{z}{\mathrm{e}^z - 1}$.
Welchen Konvergenzradius hat die Taylorentwicklung $\frac{z}{\mathrm{e}^z-1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{z^n}{n!}$?
BEMERKUNG: Die B_n sind die sogenannten Bernoulli-Zahlen,
$B_0 = 1$, $B_1 = -\frac{1}{2}$, $B_2 = \frac{1}{6}$, $B_3 = 0$, $B_4 = -\frac{1}{30}$, $B_5 = 0$, $B_6 = \frac{1}{42}$, $B_7 = 0$, $B_8 = -\frac{1}{30}$.
Was können Sie zu der Vermutung, dass die B_n beschränkt sind, sagen?

H9.2. Eine hebbare Singularität

Für die Funktion $m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $m(x) = \coth x - \frac{1}{x}$ für $x \neq 0$ und $m(0) = 0$, zeige man:

(a) m ist eine reell-analytische Funktion, d.h., sie kann in jedem Punkt durch ihre Taylorreihe dargestellt werden. Wie groß ist jeweils der Konvergenzradius?
ERINNERUNG: $\coth z = \frac{\cosh z}{\sinh z}$ und $\sin \mathrm{i}z = \mathrm{i} \sinh z$.

(b) m ist streng monoton wachsend mit Werten in $]-1, 1[$. Man skizziere den Graphen von m.

Hausaufgabenabgabe: Mittwoch, 11.6.2014, bis 16:00, Briefkasten, Keller FMI-Gebäude (für Lehramt bis Do, 12.6., 14:00)