TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Zentrum Mathematik

PROF. DR. M. WOLF
DR. M. PRÄHOFER

Funktionentheorie
MA2006/MA2008

http://www-m5.ma.tum.de/Allgemeines/MA2006_2014S

Sommersemester 2014
Blatt 5
(6.5.2014)

Tutoraufgaben

T5.1. Windungszahl

Sei $\gamma : [0,T] \to \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ ein geschlossener Weg. Die Windungszahl um $z_0 \in \mathbb{C}$ von γ ist definiert als

$$n_{z_0}(\gamma) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z - z_0}.$$

Sie zählt (mit Vorzeichen), wie oft z_0 von γ gegen den Uhrzeigersinn umrundet wird.

(a) Zeigen Sie $n_0(\gamma) \in \mathbb{Z}$.
HINWEIS: Man definiere $L(t) = \int_0^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)} \mathrm{d}s$ und bestimme $\frac{\mathrm{e}^{L(t)}}{\gamma(t)}$ durch Ableiten.

(b) Berechnen Sie $n_0(\gamma_n)$ von $\gamma_n : [0,2\pi] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit $\gamma_n(t) = \mathrm{e}^{int}$, $n \in \mathbb{Z}$.

(c) Bestimmen Sie anhand einer Skizze die Windungszahlen von $\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{C}$ mit $\gamma(t) = \cos t + \mathrm{i} \sin 3t$ um die Punkte $0, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

T5.2. Sternförmige Mengen sind einfach zusammenhängend

Zeigen Sie, dass jede sternförmige Teilmenge von $\mathbb{C}$ einfach zusammenhängend ist.

Hausaufgaben

H5.1. Hauptzweig des komplexen Arcustangens

Der komplexe Arcustangens wird als die Stammfunktion von $z \mapsto \frac{1}{z^2+1}$ auf dem sternförmigen Gebiet $\mathbb{C} \setminus i(\mathbb{R} \setminus]-1,1[)$ mit $\arctan(0) = 0$ definiert.

(a) Drücken Sie $\arctan(z)$ durch den komplexen Logarithmus aus.
HINWEIS: Partialbruchzerlegung. $\log(\pm iz)$ ist Stammfunktion von $\frac{1}{z}$ auf der nach oben/unten geschlitzten Ebene.

(b) Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil von $\arctan(x+iy)$ für $|y| < 1$.

(c) Bestimmen Sie die Höhenlinien von $\mathrm{Re}(\arctan(z))$ und $\mathrm{Im}(\arctan(z))$ für $|\mathrm{Im}\, z| < 1$.
HINWEIS: Sie verlaufen entlang Kreislinien. $\arctan(x) + \arctan(y) = \arctan \frac{x+y}{1-xy} + C$, wobei $C = 0$ für $xy < 1$ und $C = \mathrm{sgn}(x)\pi$ für $xy > 1$.

H5.2. Reelle Asymptotik des Integralsinus

Wir wollen $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x = \pi$ beweisen. Dazu sei $\gamma_r(t) = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, $t \in [0,\pi]$ für $r > 0$.

(a) Skizzieren Sie den Integranden. Warum gilt $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x = \lim\limits_{R\to\infty} \left(\int\limits_{-R}^{-\frac{1}{R}} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x + \int\limits_{\frac{1}{R}}^{R} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x \right)$?

(b) Zeigen Sie $\int\limits_{\gamma_r} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z} \mathrm{d}z \to 0$ für $r \to \infty$. HINWEIS: Majorisierte Konvergenz.

(c) Zeigen Sie $\int\limits_{\gamma_r} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z} \mathrm{d}z \to \mathrm{i}\pi$ für $r \to 0$. HINWEIS: $\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z} = \frac{1}{z} + f(z)$, mit f ganz.

(d) Durch Integration entlang des Randes von $G = \{z \in \mathbb{C} \mid \frac{1}{R} < |z| < R,\ \mathrm{Im}(z) > 0\}$ zeige man $\lim\limits_{R\to\infty} \left(\int\limits_{-R}^{-\frac{1}{R}} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{x} \mathrm{d}x + \int\limits_{\frac{1}{R}}^{R} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{x} \mathrm{d}x \right) = \mathrm{i}\pi$ und folgere $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x = \pi$.

Hausaufgabenabgabe: Dienstag, 13.5.2014, bis 16:00, Briefkasten, Keller FMI-Gebäude