TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Zentrum Mathematik

PROF. DR. M. WOLF
DR. M. PRÄHOFER

Funktionentheorie
MA2006/MA2008

Sommersemester 2014
Blatt 3
(23.4.2014)

http://www-m5.ma.tum.de/Allgemeines/MA2006_2014S

Tutoraufgaben

T3.1. Ableitung entlang Kurven

Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph und $\gamma : [a, b] \to U$ stetig differenzierbar.
Zeigen Sie: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f \circ \gamma)(t) = f'(\gamma(t))\gamma'(t)$ für $t \in (a, b)$.

T3.2. Kurvenintegrale

(a) Berechnen Sie $\oint\limits_{|z|=R} z^n \mathrm{d}z$ für $R > 0$, $n \in \mathbb{Z}$.

(b) Berechnen Sie $\oint\limits_{|z|=R} \overline{z}^n \mathrm{d}z$ für $R > 0$, $n \in \mathbb{Z}$.

(c) Warum kann $\frac{1}{z}$ auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ keine Stammfunktion haben?

Hausaufgaben

H3.1. Stammfunktionen holomorpher Funktionen

Geben Sie jeweils eine holomorphe Funktion $F : U \to \mathbb{C}$ mit maximalem Definitionsbereich an, so dass

(a) $F'(z) = z^n$, $n \in \mathbb{N}_0$,

(b) $F'(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$,

(c) $F'(z) = \frac{1}{z^{n+1}}$, $n \in \mathbb{N}$,

(d) $F'(z) = \sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n z^{-n}$,

wobei $R := (\limsup\limits_n \sqrt[n]{|a_n|})^{-1} > 0$.

H3.2. Hauptzweig des Logarithmus

Auf dem sternförmigen $\mathbb{C}^- := \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^-$ bestimmen wir die Stammfunktion F von $f(z) = \frac{1}{z}$.

(a) Wie lautet das zugehörige reelle Vektorfeld $\tilde{f}$?

(b) Wie lauten für $F = u + \mathrm{i}v$ die Gradienten von u und v?

(c) Zeigen Sie, dass $u(x, y) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$ und $v(x, y) = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x} & \text{für } x > 0, \\ \operatorname{sgn}(y) \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{für } y \neq 0, \end{cases}$ geeignete Potentiale sind. BEMERKUNG: Man überzeuge sich, dass v wohldefiniert ist.

(d) Wie lautet also F?

Hausaufgabenabgabe: Dienstag, 29.4.2014, bis 16:00, Briefkasten, Keller FMI-Gebäude