Prof. Dr. M. Wolf
Dr. M. Prähofer

Funktionentheorie
MA2006/MA2008

Sommersemester 2014
Blatt 1
(8.4.2014)
http://www-m5.ma.tum.de/Allgemeines/MA2006_2014S

Hausaufgaben

H1.1. Nullstellen von Polynomen und Linearfaktorzerlegung

Bestimmen Sie für die folgenden komplexen Polynome in z jeweils alle Nullstellen und eine Zerlegung in Linearfaktoren, wobei $n \in \mathbb{N}$, $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

(a) $z^n - 1$, (c) $c - z^n$, (e) $(z-1)^n - 1$

(b) $z^n + 1$, (d) $1 + z + \cdots + z^n$, (f) $\binom{z}{n}$,

Hinweise: (d) geometrische Summenformel, (f) $\binom{z}{0} = 1$, $\binom{z}{n+1} = \frac{z-n}{n+1}\binom{z}{n}$.

H1.2. Potenzreihen

Bestimmen Sie mit Begründung den Konvergenzradius R folgender Potenzreihen. Für welche Punkte auf dem Rand des Konvergenzkreises können Sie jeweils Konvergenz oder Divergenz beweisen?

(a) $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, (c) $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$, (e) $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n$, $\alpha \in \mathbb{C}$,

(b) $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$, (d) $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$, (f) $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^{(2^n)}$.

H1.3. Exponential- und trigonometische Funktionen

Zeigen Sie die Gültigkeit der folgenden Beziehungen für alle $w, z \in \mathbb{C}$:

(a) $\mathrm{e}^z \mathrm{e}^w = \mathrm{e}^{z+w}$ (mit Cauchy-Produktformel)

(b) $\sin z = \cos(z - \frac{\pi}{2})$, $\cos \mathrm{i}z = \cosh z$, $\sin \mathrm{i}z = \mathrm{i} \sinh z$ (mit Euler-Formel)

(c) Die Additionstheoreme für sin und cos (mit Euler-Formel)

(d) $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$

(e) Die Exponentialfunktion hat keine Nullstellen.

(f) Alle Nullstellen des Sinus liegen auf der rellen Achse.

(g) Der Kotangens ist auf den Mengen $\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z} + \mathrm{i}\mathbb{R}$ und $\mathbb{R} + \mathrm{i}\frac{\pi}{2} + \mathrm{i}\pi\mathbb{Z}$ beschränkt.

Hinweis: Alle Eigenschaften reller Funktionen werden als bekannt vorausgesetzt.

Hausaufgabenabgabe: Dienstag, 15.4.2014, bis 16:00, Briefkasten, Keller FMI-Gebäude
Abgabe zu zweit. Schreiben Sie bitte Blattnummer und Ihre Tutorgruppe deutlich auf Ihre Lösungen.