TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Zentrum Mathematik

Dr. M. Prähofer

Statsexamensvorbereitung Analysis
MA9960

http://www-m5.ma.tum.de/Allgemeines/MA9960_2017W

Wintersemester 2017/18
Blatt 10
(17.01.2018)

Aufgaben

1. [2015F3A5]

a) Man zeige, dass es keine auf $\mathbb{E} \setminus \{0\}$ holomorphe Funktion f gibt, für die $f(z)^3 = z$ für alle $z \in \mathbb{E} \setminus \{0\}$ gilt.

b) Gibt es eine nullstellenfreie ganze Funktion f, für die $|f(z)| = 2$ für $z \in \partial\mathbb{E}$ und $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\mathrm{d}t = 1$ gilt.

2. [2015H2A5]

Sei f die durch $f(z) = \frac{1}{(z+\frac{\pi}{2})\cos z}$ auf dem Streifen $G = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |\mathrm{Re}(z)| < \pi\}$ gegebene meromorphe Funktion.

(a) Klassifizieren Sie die Singularitäten von f in G.

(b) Berechnen Sie die zugehörigen Residuen.

(c) Hat f eine Stammfunktion?

(d) Man finde ein $c \in \mathbb{C}$, so dass $z \mapsto f(z) + \frac{c}{z-\frac{\pi}{2}}$ auf G eine Stammfunktion besitzt.

3. [2015H3A2]

(a) Man gebe die Definition von einer isolierten Singularität, hebbaren Singularität, einer Polstelle und einer wesentliche Singularität an.

(b) Man klassifiziere alle isolierten Singularitäten von $h(z) = \frac{z}{z-2}\exp\left(\sin\left(\frac{z-1}{z^2-z}\right)\right)$.

4. [2015F1A1]

a) Formulieren Sie den Satz von Rouché für ganze Funktionen

b) Zeigen Sie für $f(z) = 6z^6 - 2z^2 + 1$, dass $B_4(1) \subseteq f(B_1(0)) \subseteq B_8(1)$ gilt.

c) Man entscheide, ob $f(B_1(0)) \cap \mathbb{R} = f(B_1(0) \cap \mathbb{R})$ gilt.

5. [2015F2A3]

(a) Sei $r > \mathrm{e}$. Zeigen Sie, dass die Gleichung $rz\mathrm{e}^z = 1$ genau eine Lösung in $\overline{\mathbb{E}}$ besitzt.

(b) Sei $f(t) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int\limits_{|z|=3} \frac{\mathrm{e}^{zt}}{z^2(z^2+2z+2)}\mathrm{d}z$. Zeigen Sie: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist C^∞ mit $f(0) = 0$.

6. [2015H1A3]

Man beweise, dass ein komplexes Polynom vom Grad $n \geq 1$ genau n Nullstellen in $\mathbb{C}$ besitzt (mit Vielfachheit gezählt), mit Hilfe des

(a) Satzes von Rouché,

(b) Null- und Polstellen zählenden Integrals durch Abschätzen von g in $\frac{p'(z)}{p(z)} = \frac{n}{z}(1 + g(z))$.

Hausaufgabenabgabe: Mittwoch, 24.1.2018, zu Beginn der Übungen