TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Zentrum Mathematik

Dr. M. Prähofer

Statsexamensvorbereitung Analysis
MA9960
http://www-m5.ma.tum.de/Allgemeines/MA9960_2017W

Wintersemester 2017/18
Blatt 8
(20.12.2017)

Aufgaben

1. [2016H2A3] Residuenkalkül

(a) Zeigen Sie, dass $\int\limits_0^{2\pi} (\cos t)^{2n} \mathrm{d}t = \frac{\pi(2n)!}{2^{2n-1}(n!)^2}$ für $n \in \mathbb{N}$ gilt.

(b) Man betrachte $\oint\limits_{\partial G_R} \mathrm{e}^{\mathrm{i}z^2} \mathrm{d}z$ für $G_R = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| \leq R, \arg(z) \in [0, \frac{\pi}{4}]\}$ um die Integrale $\int\limits_0^\infty \sin(x^2)\mathrm{d}x$ und $\int\limits_0^\infty \cos(x^2)\mathrm{d}x$ unter Verwendung von $\int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ auszuwerten.

2. [2012F1A1] Residuenkalkül

Berechnen Sie $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^2}\mathrm{d}x$ und begründen Sie die Rechenschritte ausführlich.

3. [2012F1A2] Eigenschaften holomorpher Funktionen

(a) Gibt es eine holomorphe Funktion $f\colon \{z \in \mathbb{C} : |z| < 2\} \to \mathbb{C}$, so dass $f\left(\frac{1}{2}\right) = 2$ ist und $|f(z)| = 1$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$ gilt?

(b) Gibt es eine ganze Funktion g, so dass für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt: $\mathrm{Im}(g(x + \mathrm{i}y)) = x^2 - y^2$?

(c) Gibt es eine offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{C}$ von 0 und eine holomorphe Funktion $h\colon U \to \mathbb{C}$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt: $h^{(n)}(0) = (-1)^n(2n)!$

4. [2017F2A5] Casorati-Weierstraß

Sei $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ und $f : U \to \mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar mit: (i) $\partial_1 f_1 = \partial_2 f_2$, $\partial_2 f_1 = -\partial_1 f_2$, (ii) $f(\{x_1^2 + x_2^2 \leq 1\} \setminus \{0\})$ ist unbeschränkt, aber $f(\{|x_1| \leq 1, x_2 = 0\} \setminus \{0\})$ ist beschränkt. Zeigen Sie, dass es eine Nullfolge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in U gibt, mit $f(x_n) \to 0$ für $n \to \infty$.

5. [2017F3A1] Kurvenintegral

Sei p ein komplexes Polynom, $z \in \mathbb{C}$ und $r > 0$. Zeigen Sie: $\oint\limits_{|w-z|=r} \overline{p(w)}\,\mathrm{d}w = 2\pi\mathrm{i}r^2\,\overline{p'(z)}$.

6. [2015F2A1]

a) Sei $U = \{z \in \mathbb{C} \,|\, 2|\mathrm{Re}(z)| + 3|\mathrm{Im}(z)| + \frac{1}{1+|z|^2} < \frac{11}{2}\}$. Gibt es eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to U$ und Punkte $v, w \in \mathbb{C}$ mit $h(v) = \frac{\mathrm{i}}{2}$ und $h(w) = 1 - \mathrm{i}$?

b) Seien $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph auf dem Gebiet Ω mit $z_0 \in \Omega$ und $f(z_0) = f'(z_0) = g(z_0) = g'(z_0) = 0$. Man zeige $\lim\limits_{z\to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f''(z_0)}{g''(z_0)}$.

c) Sei $F(z) = \frac{1-\cos(z)}{z^2}$. Was für eine Singularität hat F im Ursprung?

Hausaufgabenabgabe: Mittwoch, 10.1.2018, zu Beginn der Übungen