TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Zentrum Mathematik
Dr. M. Prähofer

Statsexamensvorbereitung Analysis
MA9960

http://www-m5.ma.tum.de/Allgemeines/MA9960_2017W

Wintersemester 2017/18
Blatt 7
(13.12.2017)

Aufgaben

1. [2016H2A1]

(a) Bestimmen Sie alle Punkte, in denen $f(z) = z^2\overline{z}$, $z \in \mathbb{C}$, komplex differenzierbar ist.

(b) Klassifizieren Sie die Singularitäten von $h(z) = \frac{z^8+z^4+2}{(z-1)^3(9z^2+12z+4)}$ inklusive $z = \infty$.

(c) Berechnen Sie $\int_\gamma |z|^2 \mathrm{d}z$ wobei γ das Dreieck mit den Ecken 0, 1, $1+\mathrm{i}$ gegen den Uhrzeigersinn durchläuft.

2. [2002H3A1]

Die euklidische Ebene $\mathbb{R}^2$ werde mit der komplexen Ebene $\mathbb{C}$ vermöge der Zuordnung $(x, y) \mapsto z := x + \mathrm{i}y$ identifiziert.

(a) Sei $u\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $u(x, y) := x^2 - y^2$. Man zeige: Es gibt eine holomorphe Funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(f) = u$.

(b) Gibt es eine Funktion $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, so dass $u_1(x, y) := \sin(x) + \varphi(y)$ Realteil einer holomorphen Funktion $g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist? Falls ja, gebe man ein solches g explizit an.

(c) Gibt es eine stetige Funktion $\psi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die nicht identisch verschwindet, so dass $u_2(x, y) := \sin(x)\psi(y)$ Realteil einer holomorphen Funktion $h\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist? Falls ja, gebe man ein solches h explizit an.

3. [2002F2A1]

Gegeben seien die Funktionen

$$
\begin{aligned}
u\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad & u(x, y) = \mathrm{e}^{-y}\left(x\cos(x) - y\sin(x)\right), \\
v\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad & v(x, y) = \mathrm{e}^{-y}\left(y\cos(x) + x\sin(x)\right).
\end{aligned}
$$

(a) Zeigen Sie, dass diese Funktionen die Cauchy-Riemann Differentialgleichungen erfüllen, und dass daher die Funktion $f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y), z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$, holomorph ist.

(b) Zeigen Sie, dass $f(z) = z\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}$ für $z = \mathrm{i}y$, $y \in \mathbb{R}$, und damit für alle $z \in \mathbb{C}$ ist.

4. [2002H2A2]

Sei $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph mit $f(cz) = cf(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie:

(a) Falls $|c| \neq 1$, so existiert ein $a \in \mathbb{C}$ mit $f(z) = az$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

(b) Falls $c = -1$, so existiert eine ganze Funktion $g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = zg(z^2)$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

5. [2016H3A1] Komposition ganzer Funktionen

Zeigen Sie für ganze Funktionen f, g mit $g \circ f = 0$, dass $g = 0$ oder f konstant ist.

6. [2015H2A4]

(a) Zeigen Sie, dass es keine biholomorphe Abbildung von $\mathbb{C}$ nach $-\mathrm{i}\mathbb{H}$ gibt.

(b) Bestimmen Sie alle holomorphen Funktionen $f : G \to G$ auf dem Gebiet $G \subseteq \mathbb{C}$ für die $f \circ f = f$ gilt.

Hausaufgabenabgabe: Mittwoch, 20.12.2017, zu Beginn der Übungen