TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Zentrum Mathematik

Dr. M. Prähofer

Statsexamensvorbereitung Analysis
MA9960

http://www-m5.ma.tum.de/Allgemeines/MA9960_2017W

Wintersemester 2017/18
Blatt 6
(29.11.2017)

Aufgaben

1. [2014H1A4] Eindeutigkeit von Lösungen einer Differentialgleichung

Für welche $x_0 \in \mathbb{R}$ ist das Anfangswertproblem $\dot{x} = \sqrt[3]{x^2}$, $x(0) = x_0$, lokal, bzw., global eindeutig lösbar?

2. [2014F1A3] Differentialgleichung zweiter Ordnung

Gegeben sei die Differentialgleichung $\ddot{x} = -\cos x$.

(a) Wandeln Sie diese Differentialgleichung zweiter Ordnung in ein äquivalentes System erster Ordnung mit Variablen x und y um.

(b) Hat diese Differentialgleichung für jeden Anfangswert eine eindeutige maximale Lösung?

(c) Sind die maximalen Lösungen auf ganz $\mathbb{R}$ definiert?

(d) Man zeige, dass die Funktion $S(x, y) = 2\sin x + y^2$ ein erstes Integral ist.

3. [2014F1A2] Zweidimensionales lineares System

Bestimmen Sie (a) die Stabilitätseigenschaften des Ursprungs für das System $\binom{\dot{x}}{\dot{y}} = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \binom{x}{y}$ und skizzieren Sie (b) sein Phasenporträt.

4. [2014F3A5] Lineares inhomogenes Differentialgleichungssystem

Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $b(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ für $t \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie:

(a) ein Fundamentalsystem für $\dot{x} = Ax$, (b) eine Lösung des AWPs $\dot{x} = Ax + b(t)$, $x(0) = 0$.

5. [2014H1A5] Ebenes dynamisches System

Gegeben sei das autonome zweidimensionale Differentialgleichungssystem

$$\dot{x} = y\exp(1 - x^2 - y^2), \qquad \dot{y} = -x\exp(1 - x^2 - y^2).$$

Zeigen Sie:

(a) Das System besitzt zu jedem Anfangswert genau eine auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Lösung.

(b) Die Orbits der Lösungen sind in konzentrischen Kreislinien um den Ursprung enthalten.

(c) Jede nichtkonstante Lösung ist periodisch. Bestimmen Sie die Periodenlänge.

6. [2014F1A1] Zweidimensionales dynamisches System

Man weise die asymptotische Stabilität des Ursprungs für das Differentialgleichungssytem $\dot{x} = -x^3 + y^5$, $\dot{y} = -xy^4 - y^3$ nach.

Hausaufgabenabgabe: Mittwoch, 6.12.2017, zu Beginn der Übungen