TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Zentrum Mathematik

Dr. M. Prähofer

Statsexamensvorbereitung Analysis MA9960

http://www-m5.ma.tum.de/Allgemeines/MA9960_2017W

Wintersemester 2017/18
Blatt 5
(15.11.2017)

Aufgaben

1. [2014F2A2]

Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem $\dot{x} = A(t)x$, $x(0) = (2,1)$, mit $A(t) = \begin{pmatrix} 2t & t \\ 0 & \frac{2t}{t^2-1} \end{pmatrix}$ auf $(-1,1)$ eine eindeutige Lösung besitzt und bestimmen Sie diese.

2. [2013F3A4]

Bestimmen Sie alle beschränkten reellen Lösungen von $\frac{\mathrm{d}^4}{\mathrm{d}t^4}x + 2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}x + x = 0$.

3. [2016H1A3]

Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem $y' = -\tan(y)\mathrm{e}^y$, $y(0) = -1$, eine eindeutige Lösung auf $[0,\infty)$ besitzt und bestimmen Sie $\lim\limits_{x\to\infty} y(x)$.

4. [2014F3A4]

Zeigen Sie für das Anfangswertproblem $\dot{x}_1 = -x_1x_2$, $\dot{x}_2 = \mathrm{e}^{x_1}(1-x_2^2)$, $x(0) = \binom{1}{0}$:

(a) Es gibt eine eindeutige maximale Lösung $x : I \to \mathbb{R}^2$ auf einem offenen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$.

(b) Für alle $t \in I$ gilt $|x_2(t)| < 1$.

(c) $I = \mathbb{R}$.

(d) $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = \binom{0}{1}$ und $\lim\limits_{t\to-\infty} x(t) = \binom{0}{-1}$.

5. [2017F2A2] Erhaltungsgrößen eines Vektorfeldes

Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld, so dass die Differentialgleichung

$$\dot{x} = f(x) \qquad (*)$$

die Erhaltungsgrößen $U(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ und $V(x) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_3$ besitzt. Beweisen Sie:

(a) Alle maximalen Lösungen von $(*)$ sind auf ganz $\mathbb{R}$ definiert.

(b) $x^* = 0$ ist eine stabile stationäre Lösung von $(*)$.

(c) $W(x) = x_3$ ist eine weitere Erhaltungsgröße von $(*)$.

(d) Es gibt ein f mit den obigen Eigenschaften, für das die Lösung des Anfangswertproblems $\dot{x} = f(x)$, $x(0) = (1,0,0)$ nicht konstant und periodisch ist.

Hinweis: Eine Erhaltungsgröße (oder erstes Integral) $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ ist dadurch definiert, dass für jede Lösung $x : I \to \mathbb{R}^3$ die Funktion $I \ni t \to F(x(t))$ konstant ist.

6. [2016H2A4]

Sei $u : I \to \mathbb{R}^3$ die maximale Lösung des Anfangswertproblems $\dot{x} = v(x)$, $x(0) = (1,-1,1)$, mit $v(x,y,z) = (yz, zx, xy)$.

(a) Zeigen Sie, dass $E(x,y,z) := x^2 - y^2$ und $F(x,y,z) := y^2 - z^2$ erste Integrale sind.

(b) Man zeige, dass $u_1(t) = -u_2(t) = u_3(t)$ für t in einer Umgebung der 0 gilt.

(c) Bestimmen Sie u explizit.

7. [2016H1A5]

Bestimmen Sie alle Ruhelagen des Differentialgleichungssystems

$$\begin{aligned} x' &= -x^3 + 2x^2y - xy^2, \\ y' &= -2x^3 - y^3 + x^2y + 2y^4, \end{aligned}$$

und untersuchen Sie diese auf Stabilität.

8. [2017F3A2]

Gegeben sei das lineare Differentialgleichungssystem $\dot{x} = \left(\begin{smallmatrix} -1 & -1 \\ 4 & -1 \end{smallmatrix}\right) x$.

(a) Zeigen Sie, dass der Ursprung ein asymptotisch stabiler Gleichgewichtspunkt ist.

(b) Geben Sie einen Wert für $x(0)$ an, so dass die euklidische Norm $t \mapsto \|x(t)\|$ der zugehörigen Lösung *keine* monotone Funktion ist.

(c) Bestimmen Sie ein $p > 0$ derart, dass für jede Lösung x die Funktion $t \mapsto x_1(t)^2 + p x_2(t)^2$ monoton ist.

Hausaufgabenabgabe: Mittwoch, 29.11.2017, zu Beginn der Übungen