TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Zentrum Mathematik

DR. M. PRÄHOFER

Statsexamensvorbereitung Analysis
MA9960

`http://www-m5.ma.tum.de/Allgemeines/MA9960_2017W`

Wintersemester
2017/18
Blatt 4
(08.11.2017)

Aufgaben

1. [2014F2A1]

Sei $f(t,x) = \frac{xt}{\sqrt{x^2+1}}$ für $(t,x) \in \mathbb{R}^2$. Zeigen Sie:

(a) Das AWP $x' = f(t,x)$, $x(0) = 1$, hat eine eindeutige maximale Lösung $\lambda : I \to \mathbb{R}$.

(b) Für das maximale Lösungsintervall gilt $I = \mathbb{R}$.

(c) Für alle $t \geq 0$ ist $\lambda(t) \in [1, 1 + \frac{t^2}{2}]$.

2. [2017F1A5]

(a) Bestimmen Sie die maximale Lösung φ der Differentialgleichung $y' = \frac{6t}{1+3t^2}y + 5$ mit dem Anfangswert $\varphi(0) = 2$.

(b) Zeigen Sie, dass für jede Lösung φ der Differentialgleichung $y' = \frac{1}{5}y^3 + t\arctan(t) - \frac{\pi t}{2}$ mit $\lim\limits_{t\to\infty} \varphi'(t) = 0$ der Grenzwert $\lim\limits_{t\to\infty} \varphi(t)$ existiert, und bestimmen Sie diesen.

3. [2017H2A2] Eindimensionales dynamisches System

Gegeben Sei das Anfangswertproblem $u' = u^u$, $u(0) = u_0$. Man zeige für $u_0 > 0$:

(a) Es existiert eine eindeutige maximale Lösung.

(b) Die maximale Lösung ist nicht überall auf $\mathbb{R}_0^+$ definiert.

4. [2016F1A4] Elementare Eigenschaften eindimensionaler dynamischer Systeme

(a) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und $x : I \to \mathbb{R}$ eine Lösung der Differentialgleichung $\dot{x} = f(x)$. Zeigen Sie, dass x entweder streng monoton oder konstant ist.

(b) Bleibt die Aussage in (a) richtig, wenn f nur als stetig vorausgesetzt wird?

5. [2016H2A5]

Sei $f(t,x) = |\cos x| + t^2$ auf $\mathbb{R}^2$. Man zeige für das Anfangswertproblem $x' = f(t,x)$, $x(0) = 0$:

(a) Es gibt eine Intervall $(-\delta, \delta)$, auf dem genau eine Lösung existiert.

(b) Ist $\alpha :]a,b[\to \mathbb{R}$, $a < 0 < b$, eine Lösung, so auch $\tilde{\alpha} :]-a,-b[\to \mathbb{R}$ mit $\tilde{\alpha}(s) = -\alpha(-s)$.

(c) Für die maximale Lösung $\alpha :]t_-, t_+[\to \mathbb{R}$ gilt $t_+ = -t_- = \infty$.

6. [2017F2A3] Integralkurven eines Vektorfeldes

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $f(x) = (\sqrt{|x_2|}, \sqrt{|x_1|})$ und $D = (0,\infty)^2$. Man zeige für das Anfangswertproblem $\dot{x} = f(x)$, $x(0) = x_0$:

(a) Für jedes $x_0 \in D$ gibt es lokal eindeutige Lösungen.

(b) Es gibt genau eine Lösung $x : [0,\infty) \to \mathbb{R}^2$ für $x_0 = 0$ mit $x(t) \in D$ für alle $t > 0$.

(c) Das Anfangswertproblem mit $x(0) = 0$ ist nicht eindeutig lösbar.

Hausaufgabenabgabe: Mittwoch, 15.11.2017, zu Beginn der Übungen