TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Zentrum Mathematik
Dr. M. Prähofer

Statsexamensvorbereitung Analysis
MA9960

http://www-m5.ma.tum.de/Allgemeines/MA9960_2017W

Wintersemester 2017/18
Blatt 3
(25.10.2017)

Stoffwiederholung

Lemma: Eine stetige Funktion $f : (a, b) \to [0, \infty)$, $-\infty \leq a < b \leq \infty$, mit $f(x) \to 0$ für $t \to a, b$ nimmt ihr Maximum an.

Beweis: Ist $\sup f = 0$, dann ist 0 das Maximum von f.
Andernfalls gibt es ein $x_0 \in (a, b)$ mit $f(x_0) =: c > 0$. Zu $\epsilon = c$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass für $x \in (a, a+\delta) \cup (b-\delta, b)$ immer $0 \leq f(x) < \epsilon$ gilt (Ist $a = -\infty$, dann kann man $a + \delta$ durch ein $R \in \mathbb{R}$ ersetzen, analog für $b = \infty$). In jedem Fall gilt $x_0 \in [a+\delta, b-\delta]$. Da die Funktion f stetig ist, nimmt sie auf $[a+\delta, b-\delta]$ ihr Maximum an. Dieses ist auch das Maximum von f auf (a, b). □

Definition: Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Die Funktionenfolge $f_n : U \to \mathbb{R}$ **konvergiert gleichmäßig** gegen $f : U \to \mathbb{R}$, wenn $\|f_n - f\|_\infty = \sup\limits_{x \in U} |f_n(x) - f(x)| \to 0$ für $n \to \infty$.

Satz: Gleichmäßige Konvergenz erhält Stetigkeit

Konvergiert eine Folge stetiger Funktionen gleichmäßig, so ist die Grenzfunktion stetig.

Stoffwiederholung

Satz: Vertauschen von Limes und Integral I

Sei $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Folge stetiger Funktionen, die gleichmäßig konvergiert. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\mathrm{d}x.$$

Satz: Vertauschen von Limes und Integral II (Majorisierte Konvergenz)

Sei $f_n : I \to \mathbb{R}$ eine Folge messbarer Funktionen, die punktweise konvergiert und eine integrierbare Majorante hat. Dann ist die Grenzfunktion Lebesgue-integrierbar und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_I f_n(x)\mathrm{d}x = \int_I \lim_{n\to\infty} f_n(x)\mathrm{d}x.$$

Aufgaben

1. **[2017F2A1] Gleichmäßige Konvergenz**

   Für $n \in \mathbb{N}$ seien $f_n, g_n : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n \mathrm{e}^{-nx}$, $g_n(x) = x^n \mathrm{e}^{-x^n}$.

   (a) Untersuchen Sie, ob f_n und g_n für $n \in \mathbb{N}$ jeweils ein Maximum und Minimum besitzen.
   (b) Bestimmen Sie jeweils den punktweisen Limes der Funktionenfolgen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (c) Entscheiden jeweils, ob $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig konvergieren.

2. **[2017F3A5] Vertauschen von Limes und Integral**

   Beweisen Sie für die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $\mathbb{R}$ mit $f_n(x) = \frac{n}{1+n^2x^2}$:

   (a) f_n konvergiert auf $(0,1) \subseteq \mathbb{R}$ punktweise, aber nicht gleichmäßig gegen 0.
   (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$.
   (c) Für $\alpha \in (0,1)$ ist $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^1 x^\alpha f_n(x)\mathrm{d}x = 0$.

3. **[2016F1A5] Gleichmäßige und majorisierte Konvergenz**

   (a) Für $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n : [0, \infty[\to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{x}{n^2}\mathrm{e}^{-\frac{x}{n}}$. Zeigen Sie, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine gleichmäßig konvergente Funktionenfolge ist und berechnen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^\infty f_n(x)\mathrm{d}x$.
   (b) Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(0) = 0$. Bestimmen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^1 f(x^n)\mathrm{d}x$.

4. **[2016H3A2] Punktweise und gleichmäßige Konvergenz**

   Sei $\alpha > 0$. Beweisen Sie für die Funktionenfolge $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{\sin^2(n^\alpha x)}{nx}$ für $x \neq 0$ und $f_n(0) = 0$:

   (a) Alle f_n sind stetig.
   (b) Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert punktweise gegen die Nullfunktion.
   (c) Für $\alpha < \frac{1}{2}$ konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig. Hinweis: $|\sin x| \leq |x|$.
   (d) Für $\alpha \geq 1$ konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht gleichmäßig.

5. **[2016F2A4] Gleichmäßige Stetigkeit, diverses**

   Beweisen oder widerlegen Sie:

   (a) Stetige Funktionen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sind gleichmäßig stetig.
   (b) Die Umkehrfunktion einer stetig differenzierbaren streng monoton steigenden Funktion $f : (a,b) \to (c,d)$ ist stetig differenzierbar.
   (c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ ist reell-analytisch und ihre Potenzreihendarstellung bei $x = 0$ hat den Konvergenzradius 1.

6. **[2016F2A1] Aprproximation durch Polynome**

   Sei $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \sin(\frac{1}{z})$.

   (a) Was für eine Singularität hat f im Ursprung?
   (b) Berechnen Sie $\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z$ für $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\gamma(t) = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}t}$.
   (c) Zeigen Sie, dass f auf $U := \{z \in \mathbb{C} : \frac{1}{2} < |z| < 2\}$ nicht lokal gleichmäßig durch Polynome approximiert werden kann.

Hausaufgabenabgabe: Mittwoch, 8.11.2017, zu Beginn der Übungen