TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Zentrum Mathematik

Dr. M. Prähofer

Statsexamensvorbereitung Analysis
MA9960

`http://www-m5.ma.tum.de/Allgemeines/MA9960_2017W`

Wintersemester
2017/18
Blatt 2
(18.10.2017)

Aufgaben

1. [2017H1A1] Grundlagen

(a) Ist die Menge $A := \{z \in \mathbb{C} : |z| + \mathrm{Re}(z) \leq 1\}$ abgeschlossen in $\mathbb{C}$. Ist A kompakt?

(b) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^{5n^2} z^n$.

(c) Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ offen und $u, v : \Omega \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, so dass die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen wie üblich erfüllt sind. Entscheiden Sie, ob auch $g, h : \Omega \to \mathbb{R}$ mit $g(x, y) = \mathrm{e}^{u(x,y)} \cos(v(x, y))$ und $h(x, y) = \mathrm{e}^{u(x,y)} \sin(v(x, y))$ die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen erfüllen.

2. [2014H2A1] Verschiedene Fragen

Welche der folgenden Aussagen sind wahr, bzw., falsch? Begründen Sie Ihre Antwort.

(a) Ist $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit $f(0) = 0$ und $f(1) = 1$, so gibt es ein $t \in (0, 1)$ mit $f'(t) = 1$.

(b) Ist $A \subseteq \mathbb{R}^2$ abgeschlossen und $f : A \to \mathbb{R}$ stetig, so ist f beschränkt.

(c) Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar aber nicht konstant und ist $U \subseteq \mathbb{R}$ offen, dann ist auch $f(U)$ offen.

(d) Ist $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ komplex differenzierbar aber nicht konstant und $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, dann ist auch $f(U)$ offen.

(e) Es gibt eine bijektive holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{E}$.

(f) Es gibt eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ mit $f'(z) = \frac{1}{z}$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

3. [2017H2A1] Dezimalbruchdarstellung einer rationalen Zahl

Seien $a, b \in \mathbb{N}_0$ mit $a < b$. Die Folgen $(r_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sind rekursiv definiert durch $r_0 = a$ und für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ durch die Eigenschaft $d_{n+1} = \mathrm{floor}(\frac{10r_n}{b})$ und $r_{n+1} = 10r_n - bd_{n+1}$. Hierbei entspricht $\mathrm{floor} : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$, $\mathrm{floor}(x) = \max\{k \in \mathbb{Z} \,|\, k \leq x\}$ dem Abrunden auf die nächste ganze Zahl. Zeigen Sie:

(a) Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $r_n \in \mathbb{N}_0$, $r_n < b$, $d_{n+1} \in D := \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ und $\frac{a}{b} = \sum_{k=1}^{n} \frac{d_k}{10^k} + \frac{r_n}{10^n b}$.

(b) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{10^n} = 0$, indem Sie explizit die Definition der Konvergenz reeller Folgen nachprüfen.

(c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{d_n}{10^n} = \frac{a}{b}$.

4. [2017H3A4] Zeitabhängiges ebenes lineares System

Sei $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ stetig mit $\int_0^\infty f(t)\mathrm{d}t = \infty$ und sei $x : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ eine Lösung der Differentialgleichung $\ddot{x} + f(t)x = 0$ mit $x(0) = 1$. Man zeige: x besitzt unendlich viele Nullstellen, die keinen Häufungspunkt haben, in jeder Nullstelle ist die Ableitung ungleich Null und zwischen zwei benachbarten Nullstellen ist x entweder positiv und konkav oder negativ und konvex.

Hausaufgabenabgabe: Mittwoch, 25.10.2017, zu Beginn der Übungen