TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Zentrum Mathematik

Dr. M. Prähofer

Statsexamensvorbereitung Analysis
MA9960

`http://www-m5.ma.tum.de/Allgemeines/MA9960_2017W`

Wintersemester 2017/18
Lösungsblatt 1
(18.10.2017)

Aufgaben

1. Konvergenz

(a) Geben Sie die elementare Definition der Konvergenz einer reellen Zahlenfolge an.

(b) Wie lautet, in Quantorenschreibweise, die Verneinung der Ausage in (a)?

(c) Begründen Sie kurz, warum die Folge $(-1)^n$ nicht konvergent ist. Beweisen Sie dies anschließend elementar wie in (b) vorgegeben.

(d) Beweisen Sie, dass $\sqrt[n]{n}$ gegen 1 konvergiert.

(e) Bestimmen Sie den Grenzwert der Folge $(\frac{n-1}{n})^n$.

Lösung:

(a) Die Folge $a : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ ist konvergent, wenn es ein $a^* \in \mathbb{R}$ gibt, so dass für alle $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für jedes $n \geq N$ gilt: $|a_n - a^*| < \epsilon$. In Formeln:

$$\exists a^* \in \mathbb{R} : \forall \epsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N : |a_n - a^*| < \epsilon.$$

(b) Die Aussage "$a : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ ist nicht konvergent" lautet dann

$$\forall a^* \in \mathbb{R} : \exists \epsilon > 0 : \forall N \in \mathbb{N} : \exists n > N : |a_n - a^*| \geq \epsilon.$$

(c) $(-1)^n$ hat die beiden Häufungspunkte ± 1, kann also nicht konvergent sein.
Elementarer Beweis: Sei $a^* \leq 0$. Wähle $\epsilon = 1$. Sei $N \in \mathbb{N}$ beliebig. Dazu gibt es immer ein gerades $n \in 2\mathbb{N}$ mit $n > N$ und dafür gilt $|(-1)^n - a^*| = 1 + |a^*| \geq 1 = \epsilon$. Also kann a^* nicht grenzwert von $(-1)^n$ sein. Analog für $a^* > 0$. $\square$

(d) *Mit Analysis:* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} \overset{\text{def}}{=} \lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{e}^{\frac{1}{n}\ln n} \overset{\text{stetig}}{=} \exp\big(\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\ln n\big) \overset{\text{l'H}}{=} \exp\big(\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{1}\big) = \mathrm{e}^0 = 1.$
Elementar: Sei $\epsilon > 0$. $1 < \sqrt[n]{n} < 1 + \epsilon$ gilt, wenn $n < (1+\epsilon)^n$. Wegen $(1+\epsilon)^n > 1 + n\epsilon + \frac{n(n-1)}{2}\epsilon^2 > \frac{n(n-1)}{2}\epsilon^2$ wählen wir ein $N \in \mathbb{N}$ mit $N > \frac{2}{\epsilon^2} + 1$. Dann gilt nämlich für alle $n \geq N$, dass $(1+\epsilon)^n > \frac{n(n-1)}{2}\epsilon^2 \frac{n\frac{2}{\epsilon^2}}{2}\epsilon^2 = n$, bzw. $1 < \sqrt[n]{n} < 1 + \epsilon$.

(e) Es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} (\frac{n-1}{n})^n = \lim\limits_{n\to\infty} \exp\big(n \ln(1 - \frac{1}{n})\big) = \exp\big(-\ln'(1)\big) = \exp(-1) = \frac{1}{\mathrm{e}}$, da $\lim\limits_{n\to\infty} n \ln(1 - \frac{1}{n}) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{\ln(1-h) - \ln(1)}{h} = -\ln'(1)$.
Erinnerung: $\lim\limits_{n\to\infty} \big(1 + \frac{c}{n}\big)^n = \mathrm{e}^c$ für alle $c \in \mathbb{C}$.

2. Metrische Räume

(a) Warum ist $\mathbb{R}^n$ ein metrischer Raum?

(b) Geben Sie jeweils zwei Charakterisierungen von offenen, abgeschlossenen, kompakten und zusammenhängenden Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ an.

(c) Zeigen Sie für $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$: Stetige Urbilder erhalten die Offenheit, bzw., Abgeschlossenheit. Stetige Bilder erhalten die Kompaktheit, bzw. den Zusammenhang.

LÖSUNG:

(a) $d(x, y) = \|x - y\|$ für $x, y \in \mathbb{R}^n$ ist eine Metrik für $\mathbb{R}^n$, den $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist nichtnegativ, nicht ausgeartet ($d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$), symmetrisch und die Dreiecksungleichung gilt.

(b) $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ist **offen**, wenn es zu jedem $x \in A$ ein $\epsilon > 0$ gibt, so dass $\mathrm{B}_\epsilon(x) \subseteq A$ ist, bzw., wenn A gleich seinem Inneren ist (A ist Umgebung jedes seiner Elemente).
$A \subseteq \mathbb{R}^n$ ist **abgeschlossen**, wenn $\mathbb{R}^n \setminus A$ offen ist, bzw., wenn jede konvergente Folge in A ihren Grenzwert in A hat.
$A \subseteq \mathbb{R}^n$ ist **kompakt**, wenn jede Folge in A eine in A konvergente Teilfolge besitzt, wenn jede offene Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung enthält, bzw., wenn A beschränkt und abgeschlossen ist (gilt nur für endlichdimensionale Normierte Räume).
$A \subseteq \mathbb{R}^n$ ist **zusammenhängend**, wenn jede offene disjunkte Überdeckung eine einelementige Teilüberdeckung enthält, bzw., wenn die einzigen zugleich relativ offenen und relativ abgeschlossenen Teilmengen von A die leere Menge und A selbst sind. Für offene Mengen ist Zusammenhang äquivalent zu Wegzusammenhang.

(c) Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ stetig.
Sei $M \subseteq \mathbb{R}^m$ offen und $x \in f^{-1}(M)$. Es gibt ein $\epsilon > 0$, so dass $\mathrm{B}_\epsilon(f(x)) \subseteq M$ ist. Wegen der Stetigkeit von f gibt es hierzu ein $\delta > 0$, so dass für alle $x' \subseteq \mathrm{B}_\delta(x)$ schon $f(x') \subseteq \mathrm{B}_\epsilon(f(x))$ gilt. Mit anderen Worten $\mathrm{B}_\delta(x) \subseteq f^{-1}(M)$. D.h., auch $f^{-1}(M)$ ist offen.
Sei $M \subseteq \mathbb{R}^m$ abgeschlossen und (x_n) eine gegen $x^* \in \mathbb{R}^n$ konvergente Folge in $f^{-1}(M)$. Wegen der Stetigkeit von f gilt $f(x^*) = f(\lim\limits_{n\to\infty} x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \in M$, da M abgeschlossen ist. Mit anderen Worten, $x^* \in f^{-1}(M)$. $f^{-1}(M)$ ist also abgeschlossen.
Sei $N \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt und (y_n) eine Folge in $f(N)$. Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein $x_n \in N$, so dass $f(x_n) = y_n$. Wegen der Kompaktheit von N gibt es eine in N konvergente Teilfolge $x_{n_k} \xrightarrow{k\to\infty} x^* \in N$. Wegen der Stetigkeit von f gilt $\lim\limits_{k\to\infty} y_{n_k} = \lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}) = f(x^*) \in f(M)$. Also ist auch $f(M)$ kompakt.
Sei $N \subseteq \mathbb{R}^n$ zusammenhängend und $(U_i)_{i\in I}$ eine offene disjunkte Überdeckung von $f(M)$. Dann ist $\big(f^{-1}(U_i)\big)_{i\in I}$ eine offene disjunkte Überdeckung von N. Es gibt also ein $i_0 \in I$, so dass $f^{-1}(U_{i_0}) \supseteq N$ ist. Damit ist auch $U_{i_0} \supseteq f(N)$. D.h. $f(N)$ ist zusammenhängend.

3. Abbildungen

Sei $f : M \to N$ eine beliebige Abbildung. Seien $A, B \subseteq M$ und $C, D \subseteq N$:

(a) Gilt $f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D) = f^{-1}(C \cap D)$ oder $f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D) = f^{-1}(C \cup D)$?
(b) Gilt $f(A) \cap f(B) = f(A \cap B)$ oder $f(A) \cup f(B) = f(A \cup B)$?
(c) Gilt $C \subseteq D \iff f^{-1}(C) \subseteq f^{-1}(D)$?
(d) Gilt $A \subseteq B \iff f(A) \subseteq f(B)$?

LÖSUNG:

(a) Beide Mengengleichheiten sind allgemein gültig.
(b) Für die eindeutig bestimmte Abbildung $f : \{1, 2\} \to \{1\}$, $f(1) = f(2) = 1$, gilt offensichtlich $f(\{1\} \cap f(\{2\}) = \{1\} \neq \emptyset = f(\{1\} \cap \{2\})$. Alle anderen behaupteten Teilmengenbeziehungen sind gültig.
(c) uneingeschränkt.
(d) Die Funktion in f mit $A = \{1\}$, $B = \{2\}$ ist ein Gegenbeispiel für die Rückrichtung.

4. Axiome der reellen Zahlen

Geben Sie alle Axiome der reellen Zahlen an.

LÖSUNG:

10 Körperaxiome: Assoziativität und Kommutativität von Addition und Multiplikation (4), Existenz jeweils eines neutralen Elementes der Addition und Multiplikation (2), $0 \neq 1$ (1), Existenz des Negativen und des Inversen (2), Distributivgesetz (1).
5 Ordnungsaxiome: Transitivität, Trichotomie, Irreflexivität ($\neg x < x$), Abgeschlossenheit von $\mathbb{R}^+$ unter Addition und Multiplikation.
1 Vollständigkeitsaxiom: Jede nach oben beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ hat ein Supremum, bzw., jede Cauchy-Folge ist konvergent in $\mathbb{R}$.

5. Zwischenwertsatz und Mittelwertsatz

Formulieren Sie den Zwischenwertsatz und den Mittelwertsatz der Differentialrechnung und geben sie jeweils eine kurze Beweisskizze und Anwendungen an.

LÖSUNG:

Zwischenwertsatz. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall (zusammenhängend!), $f : I \to \mathbb{R}$ stetig, $a, b \in I$ mit $a < b$ und $f(a) < f(b)$. Dann gibt es zu jedem $c \in [f(a), f(b)]$ einen Zwischenwert $x \in [a, b]$ mit $f(x) = c$.
Zum *Beweis* wählt man ohne Einschränkung $c = 0$. Setze $x^* := \sup\{x \in [a, b] \,|\, f(x) < 0$. Damit konstruiert man eine Folge $x_n \to x^*$ und $f(x_n) \nearrow 0$. Wegen der Stetigkeit von f folgt $f(x^*) = 0$. □
Anwendungen: Existenz von "Wurzeln", bzw., Lösungen nichtlinearer Gleichungen mit einer Unbekannten, Einsperren von Lösungen eindimensionaler Differentialgleichungen.
Mittelwertsatz der Differentialrechnung. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, differenzierbar auf (a, b). Dann gibt es ein $x \in (a, b)$, sodass $f'(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.
Zum *Beweis* setzt man ohne Einschränkung $f(a) = f(b) = 0$ voraus (Satz von Rolle, durch affine Transformation). Wegen der Stetigkeit nimmt f sein Maximum oder Minimum in $x \in (a, b)$ an. Wegen der Differenzierbarkeit gilt dort $f'(x) = 0$ (Extremwerteigenschaft).
Anwendungen: Strenge Monotonie bei positiver Ableitung, Eindeutigkeit der Stammfunktionen, in einem dynamischen System sind asymptotisch erreichte Punkte stationär.

6. Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Erzählen Sie etwas über den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.

LÖSUNG:

Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung stellt einen Zusammenhang zwischen dem Riemann-Integral (oder auch Regelintegral), mit seinen Ober- und Untersummen, und der Ableitung her:
Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann existiert $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit $F(x) = \int\limits_a^x f(s)\mathrm{d}s$ und F ist Stammfunktion von f (d.i., $F' = f$).
Zum *Beweis* zeigt man die Existenz des Riemann-Integrals für stetige Funktionen auf abgeschlossenen Intervallen (auf kompakten Mengen sind stetige Funktionen gleichmäßig stetig, daher kann die Differenz aus Ober- und Untersumme einfach abgeschätzt werden). Die Differenzierbarkeit zeigt man elementar mit der Monotonie des Integrals.
Anwendungen:

- Auswertung bestimmter Integrale (auch uneigentlicher): Bei bekannter Stammfunktion: Ist F eine Stammfunktion von f, dann ist $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \big[F(x)\big]_{x=a}^b = F(b) - F(a)$.
- Garantierte Existenz einer Stammfunktion: Das AWP $\dot{x} = f$, $x(0) = x_0$ hat eine eindeutige **explizite** Lösung (z.B. benutzt bei der Methode der Variation der Konstanten). Wann immer in einem Beweis "Sei F eine Stammfunktion von f" benutzt wird.
- Integralform einer Differntialgleichung: $\dot{x} = f(t, x), x(0) = x_0 \Longleftrightarrow x(t) = x_0 + \int\limits_0^t f(s, x(s))\mathrm{d}s$.

7. Die Vollständige Induktion

Erklären Sie kurz und bündig das Prinzip der Vollständigen Induktion.

LÖSUNG:

Häufig hat man eine Aussageform $A(n)$, d.h., für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Aussage, zu beweisen. $A(1)$, $A(2)$, $A(3)$, usw., sind jeweils leicht zu überprüfen, aber ein mathematischer Beweis darf nicht unendlich lang sein, der Beweis $\forall n \in \mathbb{N} : A(n)$ gelingt nicht ohne weiteres. Hat man $A(1)$ bewiesen stellt man vielleicht fest, dass der Beweis von $A(1) \Rightarrow A(2)$ und von $A(2) \Rightarrow A(3)$, etc., leicht auf beliebiges n veralgemeinerbar ist, d.h., der Beweis von $\forall n \in \mathbb{N} : A(n) \Rightarrow A(n+1)$ gelingt. Das Prinzip der Vollständigen Induktion, das abhängig vom Kontext entweder als Axiom, Axiomsschablone oder als Theorem formuliert ist, besagt nun, dass uns dies schon als Beweis für die allgemeine Aussage genügt. Informell

$$\begin{aligned} &A(1),\ A(1) \Rightarrow A(2),\ A(2) \Rightarrow A(3),\ A(3) \Rightarrow A(4),\ \ldots \\ &\overset{\text{vollst. Ind.}}{\Longrightarrow} A(1),\ A(2),\ A(3),\ A(4),\ \ldots, \end{aligned}$$

was wegen der Transitivität des Implikationspfeiles intuitiv einleuchtend erscheint, oder formal mit Quantoren geschrieben,

$$\big(A(1) \wedge \forall n \in \mathbb{N} : A(n) \Rightarrow A(n+1)\big) \Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N} : A(n).$$