TUM, Zentrum Mathematik
Lehrstuhl für Mathematische Physik
SS 2014

Dr. Christian Döbler
Thomas Höfelsauer

Stochastik für Lehramt an Beruflichen Schulen
Wiederholungsblatt

Wiederholungsaufgaben:

Aufgabe W1

Geben Sie zu den folgenden Zufallsexperimenten Wahrscheinlichkeitsräume an und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit der Ereignisse A, B, C, D sowie E.

(i) Eine Münze werde drei mal hintereinander geworfen. Sei A das Ereignis, dass mindestens einmal Zahl oben liegt.

(ii) Ein Würfel werde zwei mal hintereinander geworfen. Sei B das Ereignis, dass die Augensumme 7 ist.

(iii) Aus einer Urne mit 10 Kugeln mit den Nummern $1, \ldots, 10$ werden 2 Kugeln mit Zurücklegen gezogen. Sei C das Ereignis, dass die kleinste gezogene Nummer eine 5 ist.

(iv) Aus einer Urne mit 10 Kugeln mit den Nummern $1, \ldots, 10$ werden 2 Kugeln ohne Zurücklegen gezogen. Sei D das Ereignis, dass die größte gezogene Nummer kleiner als 5 ist.

(v) Bei dem Spiel Schafkopf bekommt ein Spieler 8 der 32 Karten. Sei E das Ereignis, dass der Spieler mindestens 2 Asse erhält.

Aufgabe W2

Eine Gruppe von 5 Studierenden bearbeitet dieses Wiederholungsblatt als Vorbereitung für die Klausur, wobei jeder der Studierenden unabhängig von allen anderen 3 verschiedene Aufgaben bearbeitet. Sei A das Ereignis, dass alle der 10 Aufgaben von der Gruppe bearbeitet werden und sei A_i das Ereignis, dass Aufgabe i von der Gruppe nicht bearbeitet wird, wobei $i \in \{1, \ldots, 10\}$.

(i) Zeigen Sie: Die Wahrscheinlichkeit, dass die ersten k Aufgaben nicht von der Gruppe bearbeitet werden, ist

$$P(A_1 \cap \ldots \cap A_k) = \begin{cases} \left(\frac{(10-k)(9-k)(8-k)}{10 \cdot 9 \cdot 8}\right)^5 & k \in \{1, \ldots, 7\} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

(ii) Drücken Sie das Ereignis A durch die Ereignisse A_i aus.

(iii) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit von A.

(iv) Berechnen Sie die erwartete Anzahl X an bearbeiteten Aufgaben.

Aufgabe W3
Bei einer Marktforschungsumfrage für einen Optiker nehmen Männer und Frauen im Verhältnis 12 : 13 teil. Sie werden in drei paarweise disjunkte Kategorien eingeteilt: Brillenträger, Kontaktlinsenträger und Personen ohne Sehhilfe. 27% der Befragten sind Brillenträger, die Hälfte der Frauen trägt Kontaktlinsen, ein Viertel der Befragten sind Männer ohne Sehhilfen und ein Fünftel der Befragten sind Frauen ohne Sehhilfen.

(i) Benennen Sie die grundlegenden Ereignisse und stellen Sie die gegebenen Daten als Wahrscheinlichkeiten zusammen.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte befragte

(ii) Person ein Mann ist.

(iii) Person Kontaktlinsenträger ist.

(vi) Person ohne Sehhilfe eine Frau ist.

(v) Person mit Kontaktlinsen ein Mann ist.

(vi) Person mit Brille eine Frau ist.

Aufgabe W4
Eine faire Münze werde 2 mal hintereiander geworfen. Sei A_i das Ereignis, dass beim i-ten Wurfen Kopf oben liegt, wobei $i \in \{1, 2\}$ und sei A das Ereignis, dass genau einmal Kopf oben liegt.

(i) Sind A_1 und A_2 unabhängig?

(ii) Sind A_1 und A unabhängig?

(iii) Sind A_2 und A unabhängig?

(iv) Sind A_1,A_2 und A unabhängig?

Aufgabe W5
Sei (X, Y) eine Zufallsvariable mit gemeinsamer Zähldichte

$$\rho(k,l) = \begin{cases} c \cdot k \cdot l & k, l \in \{1, \dots, 3\} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

(i) Bestimmen Sie c.

(ii) Bestimmen Sie die Randdichten von X und Y.

(iii) Sind X und Y unabhängig?

(iv) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von X und Y.

(v) Berechnen Sie die Kovarianz von X und Y.

(vi) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(X = Y)$.

Aufgabe W6
Sei (X, Y) eine Zufallsvariable mit gemeinsamer Wahrscheinlchkeitsdichte
$f(x, y) = c \cdot x(x + y)\mathbb{1}_{[0,1]^2}(x, y)$.

(i) Bestimmen Sie c.

(ii) Bestimmen Sie die Randdichten von X und Y.

(iii) Sind X und Y unabhängig?

(iv) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion von X und Y.

(v) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von X und Y.

(vi) Berechnen Sie die Kovarianz von X und Y.

(vii) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(X < Y)$.

Aufgabe W7
Christian erzeugt mit seinem Computer 50 auf dem Intervall $[0, \theta]$ gleichverteilte Zufallsvariablen. Thomas soll θ erraten.

(i) Geben Sie für diese Situation ein geeignetes statistisches Modell an.

(ii) Bestimmen Sie einen Maximum-Likelihood-Schätzer T für θ.