

## Stochastik für Lehramt an Beruflichen Schulen Übungsblatt 9

### Tutoraufgaben:

#### Aufgabe T9.1

Sei  $\lambda > 0$  und sei  $X$  Exponential( $\lambda$ )-verteilt, das heißt  $X$  habe die Wahrscheinlichkeitsdichte  $f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{(0,\infty)}$ . Berechnen Sie den Erwartungswert von

- (i)  $X$ .
- (ii)  $X^2$ .
- (iii)  $e^{tX}$  für  $t \in \mathbb{R}$ .

#### Aufgabe T9.2

Sei  $\lambda > 0$  und sei  $X$  Exponential( $\lambda$ )-verteilt. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsdichte von  $X^2$ . Betrachten Sie hierfür die Verteilungsfunktionen  $F_X$  von  $X$  und  $F_{X^2}$  von  $X^2$  und zeigen Sie, dass  $F_{X^2}(x) = F_X(\sqrt{x})$  für alle  $x > 0$  gilt.

### Hausaufgaben:

#### Aufgabe H9.1 (4 Punkte)

Sei  $X$  gleichverteilt auf  $(0,1]$  und sei  $Y$  Exponential( $\lambda$ )-verteilt für ein  $\lambda > 0$ .

- (i) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktionen und Wahrscheinlichkeitsdichten von  $X^2$ ,  $\sqrt{X}$  sowie  $-\log X$ .
- (ii) Berechnen Sie den Erwartungswert von  $-\log X$  und vergleichen Sie das Ergebnis mit Aufgabe T9.1 (i).
- (iii) Finden Sie eine Funktion  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , sodass  $g(Y)$  gleichverteilt auf  $(0,1]$  ist.

#### Aufgabe H9.2 (4 Punkte)

Sei  $p \in [0, 1]$  und  $\lambda > 0$ . Berechnen Sie die Varianz der folgenden Zufallsvariablen.

- (i)  $X_1$  ist die Augenzahl eines fairen Würfels.
- (ii)  $X_2$  ist Bernoulli( $p$ )-verteilt.
- (iii)  $X_3$  ist Exponential( $\lambda$ )-verteilt, das heißt  $X_3$  hat die Wahrscheinlichkeitsdichte  $f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{(0,\infty)}(x)$ .
- (iv)  $X_4$  ist Poisson( $\lambda$ )-verteilt, das heißt  $X_4$  hat die Zähldichte  $\rho(k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$  für  $k \in \mathbb{N}_0$ .

### Aufgabe H9.3 (4 Punkte)

Eine Firma produziert kreisförmige Bierdeckel, deren Radius (in cm) durch eine auf dem Intervall  $[5, 6]$  gleichverteilte Zufallsvariable  $R$  gegeben ist. Sei  $X$  der zufällige Flächeninhalt der Bierdeckel (in  $(\text{cm})^2$ ).

- (i) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion von  $X$ .
- (ii) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsdichte von  $X$ .
- (iii) Berechnen Sie den Erwartungswert von  $X$ .
- (iv) Berechnen Sie die Varianz von  $X$ .

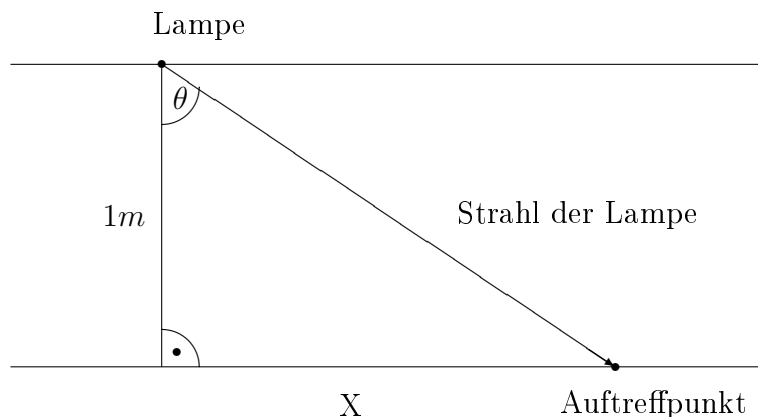
### Aufgabe H9.4 (4 Punkte)

Sei  $X$  eine Zufallsvariable mit Wahrscheinlichkeitsdichte  $f(x) = 12x^2(1-x)\mathbb{1}_{[0,1]}(x)$ .

- (i) Berechnen Sie den Erwartungswert von  $X$ .
- (ii) Berechnen Sie die Varianz von  $X$ .
- (iii) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion von  $X$ .
- (iv) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten  $P(X > 2)$ ,  $P(X = \frac{1}{2})$  sowie  $P(X \leq \frac{1}{2})$ .

### Ergänzungsaufgaben:

#### Aufgabe E9.1



Eine Lampe ist in einer Höhe von 1 Meter aufgehängt. Der Lichtstrahl trifft eine zufällige Stelle auf der  $x$ -Achse, wobei der Winkel  $\theta$  gleichverteilt ist auf  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ .

- (i) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion  $F$  und Wahrscheinlichkeitsdichte  $f$  von  $X$ .
- (ii) Zeigen Sie, dass der Erwartungswert von  $X$  nicht existiert.

**Abgabe der Hausaufgaben:** Am Montag, den 16. Juni 2014, in der Vorlesung. Weitere Informationen zur Vorlesung und dem Übungsbetrieb finden Sie unter [http://www-m5.ma.tum.de/Allgemeines/MA9943\\_2014S](http://www-m5.ma.tum.de/Allgemeines/MA9943_2014S)