TUM, Zentrum Mathematik
Lehrstuhl für Mathematische Physik
SS 2014

Dr. Christian Döbler
Thomas Höfelsauer

Stochastik für Lehramt an Beruflichen Schulen
Übungsblatt 8

Tutoraufgaben:

Aufgabe T8.1

Berechnen Sie die Erwartungswerte (falls sie existieren) der folgenden Zufallsvariablen.

(i) X^2, wobei X die Zähldichte ρ mit $\rho(k) = \frac{1}{n}$ für $k \in \{1, \ldots, n\}$ und $n \in \mathbb{N}$ hat.

(ii) Y^2 und Y^3, wobei Y die Zähldichte ρ mit $\rho(k) = \frac{45}{\pi^4} \cdot \frac{1}{k^4}$ für $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ hat.

(iii) $e^{t \cdot Z}$ für $t \in \mathbb{R}$, wobei Z die Zähldichte ρ mit $\rho(k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$ für $k \in \mathbb{N}_0$ und $\lambda > 0$ hat.

Aufgabe T8.2

Seien $t, \lambda > 0$. Zeigen Sie, dass es sich bei folgenden Funktionen um Wahrscheinlichkeitsdichten handelt.

(i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

(ii) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{t} & 0 \leq x \leq t \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

(iii) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad f(x) = \begin{cases} \frac{4x}{t^2} & 0 \leq x \leq \frac{t}{2} \\ \frac{4}{t} - \frac{4x}{t^2} & \frac{t}{2} \leq x \leq t \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Hausaufgaben:

Aufgabe H8.1 (4 Punkte)

Wir betrachten das Beispiel 1.24 aus der Vorlesung (Rencontre-Problem). Zu einer Tanzveranstaltung kommen $n \in \mathbb{N}$ Paare von Frauen und Männern. Dann wird jeder Frau rein zufällig ein Tanzpartner zugelost. Sei X die Anzahl der Frauen, die mit ihrem eigentlichen Partner tanzen. Berechnen Sie den Erwartungswert von X.
Hinweis: Betrachten Sie eine geeignete Zerlegung $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$, wobei X_i angibt, ob die i-te Frau mit ihrem Partner tanzt und verwenden Sie die Linearität des Erwartungswerts.

Aufgabe H8.2 (4 Punkte)
Beim Spiel *chuck-a-luck* zahlt ein Spieler einen Euro Einsatz, nennt eine der Zahlen $1, 2, \ldots, 6$ und wirft anschließend 3 faire Würfel. Für jeden Würfel, der die genannte Augenzahl zeigt, erhält der Spieler einen Euro. Ist dieses Spiel fair? Berechnen Sie hierfür den erwarteten Gewinn des Spielers.

Aufgabe H8.3 (4 Punkte)
Sei X eine reelle Zufallsvariable mit Wahrscheinlichkeitsdichte $f(x) = c\cdot(1+x)e^{-x}\mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)$, $x \in \mathbb{R}$, mit einer Konstante $c \in \mathbb{R}$.

(i) Bestimmen Sie die Konstante c.

(ii) Berechnen Sie die Verteilungsfunktion F von X.

(iii) Skizzieren Sie die Dichte f und die Verteilungsfunktion F.

(iv) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten $P(X = 2)$, $P(1 \leq X \leq 2)$ und $P(X < 5)$. Veranschaulichen Sie diese Wahrscheinlichkeiten in Ihrer Skizze der Dichte f.

Aufgabe H8.4 (4 Punkte)
Sei $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ x^3 & \text{für } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{für } x > 1. \end{cases}$$

(i) Zeigen Sie, dass F eine Verteilungsfunktion ist und bestimmen Sie die zugehörige Wahrscheinlichkeitsdichte f.

(ii) Sei X eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion F. Bestimmen Sie $E(X)$, $E(X^2)$ sowie $E\left(\frac{1}{X}\right)$.

Ergänzungsaufgaben:

Aufgabe E8.1 In jedem Hanuta befindet sich ein Exemplar von insgesamt 20 verschiedenen Fußballstickern. Wir nehmen an, dass bei jedem gekauften Hanuta die Wahrscheinlichkeit für jeden Sticker gleich ist. Ein eifriger Sammler kauft so lange Hanutas, bis er von jedem Sticker mindestens ein Exemplar erhalten hat. Bestimmen Sie den Erwartungswert der Anzahl X der Hanutas, die er dazu kaufen muss.
Hinweis: Schreiben Sie $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_{20}$, wobei X_j die Anzahl der Hanutas angibt, die der Sammler nach Erhalt des $(j-1)$-ten verschiedenen Stickers kaufen muss, um den nächsten verschiedenen Sticker zu bekommen. Bestimmen Sie die Verteilung der X_j und nutzen Sie die Linearität des Erwartungswertes.

Abgabe der Hausaufgaben: Am Donnerstag, den 12. Juni 2014, in der Vorlesung.
Weitere Informationen zur Vorlesung und dem Übungsbetrieb finden Sie unter
`http://www-m5.ma.tum.de/Allgemeines/MA9943_2014S`