TUM, Zentrum Mathematik
Lehrstuhl für Mathematische Physik
SS 2014

Dr. Christian Döbler
Thomas Höfelsauer

Stochastik für Lehramt an Beruflichen Schulen
Übungsblatt 7

Tutoraufgaben:

Aufgabe T7.1

Wir haben eine Urne mit 5 roten, 4 blauen und 3 gelben Kugeln und ziehen insgesamt dreimal. Es bezeichne X die Anzahl der gezogenen blauen Kugeln. Bestimmen Sie die Zähldichte ρ von X, wenn wir

(i) mit Zurücklegen ziehen.

(ii) ohne Zurücklegen ziehen.

Aufgabe T7.2

Berechnen Sie die Erwartungswerte (falls sie existieren) der folgenden Zufallsvariablen.

(i) X_1 ist die Augenzahl eines fairen Würfels.

(ii) X_2 ist die Summe der Augenzahlen zweier fairer Würfel.

(iii) X_3 ist Bernoulli(p) verteilt.

(iv) X_4 hat die Zähldichte ρ, wobei $\rho(1) = \frac{1}{2}$, $\rho(2) = \frac{1}{3}$ und $\rho(3) = \frac{1}{6}$.

(v) X_5 hat die Zähldichte ρ, wobei $\rho(k) = \frac{1}{k(k+1)}$ für $k \in \mathbb{N}$.

Hausaufgaben:

Aufgabe H7.1 (4 Punkte)

Aus einer Urne mit Kugeln der Aufschrift $1, \ldots, N$ wird n mal gezogen und es sei X die höchste gezogene Nummer. Bestimmen Sie die Zähldichte ρ von X, wenn wir

(i) mit Zurücklegen ziehen.

(ii) ohne Zurücklegen ziehen.

Aufgabe H7.2 (4 Punkte)

Berechnen Sie die Erwartungswerte (falls sie existieren) der folgenden Zufallsvariablen.

(i) X_1 ist das Maximum der Augenzahlen zweier fairer Würfel.

(ii) X_2 hat die Zähldichte ρ mit $\rho(k) = \frac{1}{n}$ für $k \in \{1, \ldots, n\}$ und $n \in \mathbb{N}$.

(iii) X_3 hat die Zähldichte ρ, wobei $\rho(k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$ für $k \in \mathbb{N}_0$ und $\lambda > 0$.

(iv) X_4 hat die Zähldichte ρ, wobei $\rho(k) = \frac{45}{\pi^4} \cdot \frac{1}{k^4}$ für $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Aufgabe H7.3 (4 Punkte)
Sei X eine $geometrisch(p)$-verteilte Zufallsvariable.

(i) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(X > k)$ für $k \in \mathbb{N}_0$.

(ii) Zeigen Sie, dass X gedächtnislos ist, das heißt für $k, l \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$P(X > k + l | X > l) = P(X > k).$$

(iii) Berechnen Sie den Erwartungswert von X.

Aufgabe H7.4 (4 Punkte)
Bei einem Glücksspiel wird eine faire Münze so oft geworfen, bis zum ersten Mal „Kopf“ erscheint. Ein Mitspieler bekommt für seinen Einsatz eine Auszahlung von 2^k Euro, wenn beim k-ten Wurf zum ersten Mal „Kopf“ erscheint. Berechnen Sie die zu erwartende Auszahlung und überlegen Sie, ob Sie bereit wären, für den Eintritt in dieses Spiel einen Einsatz von 100 Euro, zu leisten.

Ergänzungsaufgaben:

Aufgabe E7.1

(i) Sei X eine Zufallsvariable mit Werten in $\mathbb{N}_0$. Zeigen Sie, dass dann $E[X] = \sum_{k=1}^{\infty} P(X \geq k)$ gilt.

(ii) Bestimmen Sie mit Hilfe von (i) erneut den Erwartungswert einer $geometrisch(p)$-verteilten Zufallsvariablen.

Abgabe der Hausaufgaben: Am Montag, den 2. Juni 2014, in der Vorlesung. Weitere Informationen zur Vorlesung und dem Übungsbetrieb finden Sie unter
`http://www-m5.ma.tum.de/Allgemeines/MA9943_2014S`