TUM, Zentrum Mathematik
Lehrstuhl für Mathematische Physik
SS 2014

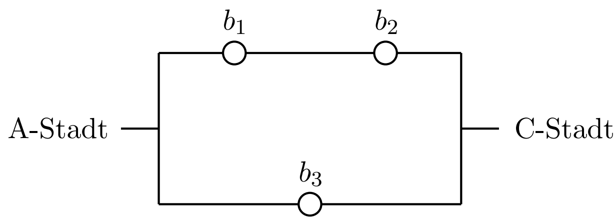
Dr. Christian Döbler
Thomas Höfelsauer

Stochastik für Lehramt an Beruflichen Schulen
Übungsblatt 6

Tutoraufgaben:

Aufgabe T6.1

Es gibt zwei Landstraßen zwischen A-Stadt und C-Stadt, nennen wir sie L_1 und L_2. Am Rande der L_1 stehen die Bäume b_1 und b_2, am Rande der L_2 steht der Baum b_3 (siehe Bild). Bei dem Sturm in der letzten Nacht ist jeder der drei Bäume b_1, b_2, b_3 mit Wahrscheinlichkeit $1-p$ unabhängig von den anderen Bäumen umgefallen und hat die Landstraße blockiert. Für $1 \leq i \leq 3$ bezeichne B_i das Ereignis, dass der Baum b_i die Landstraße *nicht* blockiert.



Drücken Sie das Ereignis $D = \{$Mindestens eine der beiden Landstraßen zwischen A-Stadt und C-Stadt ist nicht blockiert$\}$ durch die Ereignisse B_1, B_2 und B_3 aus und berechnen Sie $P(D)$.

Aufgabe T6.2

Eine Katzenfamilie hat 3 kleine Kätzchen. Jedes Kätzchen ist mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ weiblich und mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ männlich, unabhängig von allen anderen Kätzchen. Betrachten Sie die Ereignisse

$A = \{$Unter den Katzenkindern ist höchstens ein Kater$\}$,

$B = \{$Die Katzenfamilie hat sowohl männliche als auch weibliche Nachkommen$\}$.

Sind die Ereignisse A und B unabhängig? Begründen Sie Ihre Antwort.

Hausaufgaben:

Aufgabe H6.1 (4 Punkte)

Ein vierseitiger Würfel (Tetraeder) ist an drei Seiten jeweils mit einer der drei Zahlen 1, 2 und 3 beschriftet und an der vierten Seiten mit allen drei Zahlen. Sie A_i das Ereignis, dass nach einem Wurf die Zahl i unten liegt, wobei $i \in \{1, 2, 3\}$. Zeigen Sie, dass

(i) je zwei der Ereignisse A_1, A_2 und A_3 unabhängig sind.

(ii) A_1, A_2 und A_3 nicht unabhängig sind.

Aufgabe H6.2 (4 Punkte)
Ein technisches Gerät besteht aus n Einzelteilen, welche unabhängig voneinander mit derselben Wahrscheinlichkeit p ausfallen. Das Gerät ist nur funktionstüchtig, wenn jedes Einzelteil funktioniert.

(i) Berechnen Sie die Ausfallwahrscheinlichkeit des Geräts.

(ii) Durch Parallelschaltung identischer Bauelemente soll die Ausfallsicherheit des Geräts erhöht werden. Bei Ausfall eines Elements übernimmt dann automatisch eines der noch funktionierenden Parallel-Elemente die Aufgabe des ausgefallenen Bauteils. Jedes Einzelteil sei nun k-fach parallel geschaltet und alle Ausfälle sind unabhängig voneinander. Zeigen Sie, dass die Ausfallwahrscheinlichkeit des Geräts gleich $1 - (1 - p^k)^n$ ist.

Aufgabe H6.3 (4 Punkte)
Seien A, B und C Ereignisse. Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Falls $A = B$ gilt, so sind A und B abhängig.

(ii) $P(A) \in \{0, 1\}$ impliziert, dass A und B unabhängig sind.

(iii) Sind A und B sowie B und C unabhängig, so sind auch A und C unabhängig.

(iv) Sind A, B und C unabhängig, so sind auch $A \cup B$ und C unabhängig.

Aufgabe H6.4 (4 Punkte)
Sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und A, B und C unabhängige Ereignisse mit

$$P(A \cap B) = \frac{1}{6} \qquad P(A \cap C) = \frac{1}{12} \qquad P(B \cap C) = \frac{1}{18}.$$

(i) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten $P(A), P(B)$ und $P(C)$.

(ii) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass keines der Ereignisse A, B und C eintritt.

Ergänzungsaufgaben:

Aufgabe E6.1
Eine faire Münze werde n mal geworfen, wobei $n \in \mathbb{N}$. Für $i \in \{1, \ldots, n\}$ sei A_i das Ereignis, im i-ten Wurf Zahl zu bekommen. Außerdem sei A_{n+1} das Ereignis, genauso oft Kopf wie Zahl zu erhalten.

(i) Stellen Sie einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum auf und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten $P(A_i)$ für $i \in \{1, \ldots, n+1\}$.

(ii) Zeigen Sie, dass $A_1, A_2, \ldots, A_n, A_{n+1}$ abhängig, aber jeweils n dieser $n + 1$ Ereignisse unabhängig sind.

Abgabe der Hausaufgaben: Am Montag, den 26. Mai 2014, in der Vorlesung. Weitere Informationen zur Vorlesung und dem Übungsbetrieb finden Sie unter
`http://www-m5.ma.tum.de/Allgemeines/MA9943_2014S`