TUM, Zentrum Mathematik
Lehrstuhl für Mathematische Physik
SS 2014

Dr. Christian Döbler
Thomas Höfelsauer

Stochastik für Lehramt an Beruflichen Schulen
Übungsblatt 4

Tutoraufgaben:

Aufgabe T4.1
In einem dreistöckigen Gebäude steigen fünf Personen im Erdgeschoss in den Aufzug. Jede Person steigt zufällig in einem der drei Stockwerke aus. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass genau zwei Personen im dritten Stock aussteigen.

Aufgabe T4.2
Eine Familie habe zwei Kinder. Wir nehmen an, dass jedes der beiden Kinder mit gleicher Wahrscheinlichkeit ein Junge wie ein Mädchen sein kann.

(i) Wir erhalten die Information, dass mindestens eines der beiden Kinder ein Junge ist. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat die Familie zwei Jungen?

(ii) Wir erhalten die Information, dass das älteste der beiden Kinder ein Junge ist. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat die Familie zwei Jungen?

Hausaufgaben:

Aufgabe H4.1 (4 Punkte)
Für den Grundraum $\Omega = \{0,1\}^n$ aller Bitfolgen der Länge n möchte man entscheiden, ob eine konkrete Bitfolge $(\omega_1, \ldots, \omega_n)$ zufällig zustandegekommen ist, indem man die Gruppen von aufeinanderfolgenden Nullen und Einsen betrachtet.
Wir sagen an der Stelle $k \in \{2, \ldots, n\}$ tritt ein Wechsel auf, falls $\omega_{k-1} \neq \omega_k$. Betrachten Sie für $l \in \{0, \ldots, n-1\}$ das Ereignis A_l, dass in der Bitfolge genau l Wechsel auftreten. Berechnen Sie unter der Annahme der Gleichverteilung auf Ω die Wahrscheinlichkeiten $\rho(l) = P(A_l)$ für $l \in \{0, \ldots, n-1\}$.
In welchem anderen Modell kommt diese Zähldichte vor?

Aufgabe H4.2 (4 Punkte)
Zur Fußball-WM kauft Christian Sammelbilder von Fußballspielern. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass er jeden Fußballspieler mindestens einmal erhält, wenn es n verschiedene Bilder gibt und er $m \geq n$ Bilder kauft.

Aufgabe H4.3 (4 Punkte)
Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A, B \in \mathcal{F}$ Ereignisse mit $0 < P(B) < 1$. Zeigen oder widerlegen Sie:

(i) $P(A^c|B) = 1 - P(A|B)$

(ii) $P(A|B^c) = 1 - P(A|B)$

(iii) $P(A|B) \geq P(A)$

(iv) $P(A|B) \geq P(A \cap B)$

Aufgabe H4.4 (4 Punkte)
Wir haben 6 Beutel mit jeweils 5 Äpfeln. Der erste Beutel enthält 5 frische Äpfel, der zweite Beutel enthält 4 frische und einen faulen Apfel, usw., der sechste Beutel enthält 5 faule Äpfel. Wir werfen nun einen unverfälschten Würfel und ziehen danach zweimal ohne Zurücklegen aus dem Beutel, dessen Nummer durch den Würfelwurf angegeben wird. Wir definieren die Ereignisse:

$$\begin{aligned} A_1 &: \text{„Der erste gezogene Apfel ist faul."} \\ A_2 &: \text{„Der zweite gezogene Apfel ist faul."} \\ B_i &: \text{„Die Augenzahl des Würfels ist } i\text{."} \end{aligned}$$

(i) Bestimmen Sie mit Hilfe des Satzes von der totalen Wahrscheinlichkeit (Satz 2.7) die Wahrscheinlichkeit $P(A_1)$, dass der erste gezogene Apfel faul ist. Wieso ist das Ergebnis plausibel?

(ii) Bestimmen Sie die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(A_2|A_1)$, dass der zweite gezogene Apfel faul ist, wenn wir schon wissen, dass der erste gezogene Apfel faul ist. Verwenden Sie hierfür wieder Satz 2.7 und das Ergebnis von (i).

Ergänzungsaufgaben:

Aufgabe E4.1

(i) In einer Urne seien r rote und w weiße Kugeln, wobei $r, w \in \mathbb{N}$. Wir ziehen nun $n \leq r + w$ Kugeln ohne Zurücklegen. Betrachten Sie das Ereignis E_k, dass genau k rote Kugeln gezogen werden. Zeigen Sie, dass für $\max\{0, n - w\} \leq k \leq \min\{r, n\}$

$$P(E_k) = \frac{\binom{r}{k}\binom{w}{n-k}}{\binom{r+w}{n}}$$

gilt. $\rho(k) = P(E_k)$ heißt auch Zähldichte der hypergeometrischen Verteilung

(ii) Eine Warenlieferung enthält 40 intakte und 10 defekte Stücke. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Stichprobe von 10 Stück genau 2 defekte Teile enthält?

Abgabe der Hausaufgaben: Am Montag, den 12. Mai 2014, in der Vorlesung. Weitere Informationen zur Vorlesung und dem Übungsbetrieb finden Sie unter
`http://www-m5.ma.tum.de/Allgemeines/MA9943_2014S`