TUM, Zentrum Mathematik
Lehrstuhl für Mathematische Physik
SS 2014

Dr. Christian Döbler
Thomas Höfelsauer

Stochastik für Lehramt an Beruflichen Schulen
Übungsblatt 2

Tutoraufgaben:

Aufgabe T2.1

Ein Würfel werde 20 mal geworfen und es werden folgende Ergebnisse beobachtet: $4, 1, 1, 6, 2, 4, 5, 1, 3, 3, 6, 2, 4, 2, 2, 1, 6, 5, 5, 3$
Berechnen Sie die relativen Häufigkeiten der Ereignisse $A = \{2\}$ sowie $B = \{2, 4, 6\}$.

Aufgabe T2.2

Sei Ω ein Ergebnisraum und seien $A, B \subseteq \Omega$ Ereignisse. Sei P ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf Ω. Ist es möglich, dass

(i) genau eines der Ereignisse A, B eintritt, falls $P(A) = P(B) = 0,2$?

(ii) genau eines der Ereignisse A, B eintritt, falls $P(A) = P(B) = 0,7$?

(iii) keines der Ereignisse A, B eintritt, falls $P(A) = P(B) = 0,2$ und A und B zusätzlich disjunkt sind?

(iv) $P(A) = P(B) = 0,7$ und A und B zusätzlich disjunkt sind?

Hausaufgaben:

Aufgabe H2.1 (4 Punkte)

Sei Ω ein abzählbarer Ergebnisraum und sei $\omega \in \Omega_n := \Omega^n$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass für die relative Häufigkeit r_n folgende Eigenschaften gelten:

(i) $0 \leq r_n(A, \omega) \leq 1 \quad$ für alle $A \subseteq \Omega$

(ii) $r_n(\Omega, \omega) = 1$

(iii) $A \cap B = \emptyset \quad \Rightarrow \quad r_n(A \cup B, \omega) = r_n(A, \omega) + r_n(B, \omega)$.

Aufgabe H2.2 (4 Punkte)

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und seien $A_1, A_2 \in \mathcal{F}$ Ereignisse.

(i) Drücken Sie die folgenden Ereignisse mit Hilfe von Mengenoperationen durch A_1 und A_2 aus und bestimmen Sie deren Wahrscheinlichkeiten unter der Annahme, dass $P(A_1) = P(A_2) = \frac{2}{3}$ und $P(A_1 \cap A_2) = \frac{1}{3}$.

$A =$ „Es tritt mindestens eines der Ereignisse A_1, A_2 ein.“
$B =$ „Es tritt entweder A_1, oder A_2 ein.“
$C =$ „Es tritt A_1 ein, aber nicht A_2.“

Sei nun $A_3 \in \mathcal{F}$ ein weiteres Ereignis, für das $A_3 \subseteq A_2 \setminus A_1$ und $P(A_2 \setminus A_3) = \frac{1}{2}$ gilt.

(ii) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse

$D =$ „Es tritt mindestens eines der Ereignisse A_1, A_2, A_3 ein.“
$E =$ „Es tritt A_3 ein.“
$F =$ „Es treten genau zwei der Ereignisse A_1, A_2, A_3 ein.“

Aufgabe H2.3 (4 Punkte)
Sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und seien $A, B \in \mathcal{F}$. Zeigen Sie, dass

(i) $A \subseteq B \Rightarrow P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$

(ii) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Aufgabe H2.4 (4 Punkte)
Ein Würfel wird zwei mal hintereinander geworfen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ergeignisse.

$A =$ „Der erste Wurf ist eine 6.“
$B =$ „Es wird mindestens eine 6 geworfen.“
$C =$ „Die Augensumme der beiden Würfe ist 3.“
$D =$ „Die Augensumme der beiden Würfe ist größer als 3.“

Ergänzungsaufgaben:

Aufgabe E2.1

(i) Sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und seien $A_j \in \mathcal{F}$ für $j \in \mathbb{N}$ Ereignisse mit $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots$. Sei weiter $A := \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$. Zeigen Sie, dass $P(A) = \lim_{j\to\infty} P(A_j)$ gilt. Diese Eigenschaft nennt man *Stetigkeit von unten* des Wahrscheinlichkeitsmaßes P. Beweise dieser Aussage finden sie etwa in [2] (siehe Satz 1.10 (i)) oder in [1] (siehe Satz 1.11 (e)).

(ii) Ein einsamer Würfelspieler spielt mit sich selbst das folgende Spiel: Er würfelt mit einem unverfälschten Würfel so lange bis zum ersten mal eine Sechs erscheint. Dann darf er das Spiel beenden. Für $j \in \mathbb{N}$ bezeichne A_j das Ereignis, dass er spätestens nach dem j-ten Wurf mit dem Spiel aufhören darf. Bestimmen Sie $P(A_j)$ für $j \in \mathbb{N}$ und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A, dass er jemals mit dem Spiel aufhören darf.

Literatur

[1] Georgii - Stochastik, 3. Auflage, de Gruyter, 2007, als Ebook im Online-Katalog der Universitätsbibliothek verfügbar

[2] Dehling, Haupt - Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und mathematische Statistik, 2. Auflage, Springer, 2004

Abgabe der Hausaufgaben: Am Montag, den 28. April 2014, in der Vorlesung. Weitere Informationen zur Vorlesung und dem Übungsbetrieb finden Sie unter
`http://www-m5.ma.tum.de/Allgemeines/MA9943_2014S`