TUM, Zentrum Mathematik
Lehrstuhl für Mathematische Physik
SS 2014

Dr. Christian Döbler
Thomas Höfelsauer

Stochastik für Lehramt an Beruflichen Schulen
Übungsblatt 12

Tutoraufgaben:

Aufgabe T12.1

Im Land Phantasia kommt es zu einer Stichwahl zwischen den Kandidaten A und B. Kandidat A hat 1500 treue Anhänger und Kandidat B ist sich der Stimmen seiner 500 Gefolgsleute sicher. Die restlichen 998 000 Wahlberechtigten entscheiden sich unabhängig voneinander und mit gleicher Wahrscheinlichkeit zwischen den beiden Kandidaten.

(i) Verwenden Sie die Normalapproximation (Satz 6.6), um die ungefähre Wahrscheinlichkeit dafür zu bestimmen, dass Kandidat A die Wahl gewinnt.

(ii) Wie viele zusätzliche Wahlberechtigte (der restlichen 998 000) muss Kandidat A überzeugen für sich zu stimmen, damit er die Wahl mit einer Wahrscheinlichkeit von mindesten 95% gewinnt?

Aufgabe T12.2

Geben Sie in den folgenden Fällen jeweils ein geeignetes statistisches Modell an.

(i) Die Geologin Annegret misst den Durchmesser von 1000 Kieselsteinen in einem alten Flussbett. Aufgrund theoretischer Überlegungen glaubt Annegret, dass der Logarithmus des Durchmessers eines Kieselsteines normalverteilt mit Parametern μ und σ^2 ist. Sie möchte aus ihren Beobachtungen Rückschlüsse auf μ und σ^2 ziehen. Annegret hat im Voraus keinerlei Informationen über diese Größen.

(ii) Wenn man eine Heftzwecke wirft, landet sie mit einer unbekannten Wahrscheinlichkeit θ so, dass die Spitze nach oben zeigt. Um Rückschlüsse auf θ zu ziehen, wirft Julian eine Heftzwecke 100-mal und notiert für jeden Wurf, ob die Spitze nach oben zeigt oder nicht.

(iii) In der Situation von (b) notiert sich Stefan nur die Anzahl der Würfe, bei denen die Spitze nach oben zeigt.

Hausaufgaben:

Aufgabe H12.1 (4 Punkte)

Thomas schlägt Christian folgendes Spiel vor: „Wir werfen eine Münze 100 mal hintereinander. Wenn die Münze genau 50 mal Kopf zeigt, bekomme ich 10 Euro und wenn die Münze mindestens 60 mal Kopf zeigt, bekommst du 10 Euro.“ Sollte sich Christian auf dieses Spiel einlassen? Verwenden Sie die Normalapproximation, um die Wahrscheinlichkeit dafür zu bestimmen, dass Christian bzw. Thomas gewinnt.

Hinweis: Sei S_{100} die Anzahl der Würfe, die Kopf zeigen. Dann gilt $P(S_{100} = k) = P(k-1 < S_{100} \leq k)$ für alle $k \in \{0, \ldots, 100\}$.

Aufgabe H12.2 (4 Punkte)
Wir werfen n-mal mit einem unverfälschten Würfel und bezeichnen mit S_n die Summe der n Augenzahlen. Wie groß müssen wir n wählen, damit die mittlere Augenzahl $\frac{S_n}{n}$ mit Wahrscheinlichkeit mindestens 95% zwischen 3.49 und 3.51 liegt.

Aufgabe H12.3 (4 Punkte)
In einem Teich befindet sich eine unbekannte Anzahl θ von Fischen. An einem Tag fängt Paul 50 dieser Fische, markiert diese und lässt sie zurück in den Teich. Am folgenden Tag, wenn sich die Fische wieder gut verteilt haben, fängt Paul nochmal 10 Fische aus dem Teich, wovon genau x markiert sind.

(i) Geben Sie ein statistisches Modell für diese Situation an.

(ii) Bestimmen Sie einen Maximum-Likelihood-Schätzer T für θ. Wieso ist dieser auch intuitiv plausibel?

Aufgabe H12.4 (4 Punkte)
In einer Lostrommel befinden sich $\theta \in \mathbb{N}$ Lose mit den Nummern $1, 2, \ldots, \theta$, wobei θ unbekannt ist. Der kleine Fritz möchte wissen, wie viele Lose sich in der Trommel befinden und entnimmt in einem unbeobachteten Moment ein Los, notiert sich die aufgedruckte Nummer und legt es wieder zurück. Diesen Vorgang führt er insgesamt 10-mal durch.

(i) Geben Sie für diese Situation ein geeignetes statistisches Modell an.

(ii) Bestimmen Sie einen Maximum-Likelihood-Schätzer T für θ.

Ergänzungsaufgaben:

Aufgabe E12.1
Sei $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $[0, 1]$ mit $np_n \to \alpha$ für eine Konstante $\alpha > 0$. Weiter sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallsvariablen, wobei X_n Binomial(n, p_n)-verteilt ist.
Bestimmen Sie für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ den Limes $\lim_{n\to\infty} P(X_n = k)$.

Abgabe der Hausaufgaben: Am Montag, den 7. Juli 2014, in der Vorlesung. Weitere Informationen zur Vorlesung und dem Übungsbetrieb finden Sie unter
`http://www-m5.ma.tum.de/Allgemeines/MA9943_2014S`