

Stochastik für Lehramt an Beruflichen Schulen Übungsblatt 11

Tutoraufgaben:

Aufgabe T11.1

Sei (X, Y) eine Zufallsvariable mit gemeinsamer Zähldichte ρ , die wie folgt gegeben ist:

$\rho(x, y)$	$y = -1$	$y = 0$	$y = 1$
$x = -1$	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
$x = 0$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{6}$
$x = 1$	$\frac{1}{6}$	0	0

- Bestimmen Sie die Randverteilungen von X und Y .
- Sind X und Y unabhängig?
- Berechnen Sie den Erwartungswert von X und Y .
- Bestimmen Sie die Zähldichte des Produkts $Z = X \cdot Y$.
- Berechnen Sie die Kovarianz von X und Y .

Aufgabe T11.2

Sei (X, Y) eine Zufallsvariable mit gemeinsamer Dichte $f(x, y) = 6xy^2 \mathbf{1}_{[0,1]^2}(x, y)$.

- Bestimmen Sie die Randdichten von X und Y .
- Sind X und Y unabhängig?
- Berechnen Sie die Kovarianz von X und Y .
- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass (X, Y) im Einheitskreis liegt.

Hausaufgaben:

Aufgabe H11.1 (8 Punkte)

Betrachten Sie die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto 2e^{-(x+2y)} \mathbf{1}_{[0, \infty)^2}(x, y)$.

- Zeigen Sie, dass f eine Dichtefunktion ist.
- Sei (X, Y) eine Zufallsvariable mit Wahrscheinlichkeitsdichte f . Berechnen Sie die Randverteilungen von X und Y . Sind X und Y unabhängig?

- (iii) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktionen von X und Y sowie deren gemeinsame Verteilungsfunktion.
- (iv) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten $P(X \leq 2)$, $P(X = 5)$, $P(Y \leq 4)$ und $P(X < 2Y)$.
- (v) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass (X, Y) im Einheitskreis liegt.
- (vi) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von X und Y .
- (vii) Berechnen Sie die Kovarianz von X und Y .

Aufgabe H11.2 (4 Punkte)

Für die Zufallsvariablen X und Y gelte

$$P(X = 0, Y = 0) = \frac{1}{10}, \quad P(X = 0, Y = 1) = \frac{2}{10},$$

$$P(X = 1, Y = 0) = \frac{3}{10}, \quad P(X = 1, Y = 1) = \frac{4}{10}$$

- (i) Berechnen Sie die Randdichten von X und Y .
- (ii) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von X und Y .
- (iii) Berechnen Sie die Kovarianz von X und Y sowie den Korrelationskoeffizient.

Aufgabe H11.3 (4 Punkte)

- (i) Seien X und Y unabhängige Zufallsvariablen mit Werten in \mathbb{Z} und Zähldichten ρ_X und ρ_Y . Zeigen Sie, dass für die Zähldichte der Zufallsvariable $X + Y$ gilt

$$\rho_{X+Y}(k) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \rho_X(n) \rho_Y(k - n), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

- (ii) Bestimmen Sie die Verteilung von $X + Y$, falls X und Y unabhängig und Poisson-verteilt zu den Parametern λ und μ sind.
- (iii) Die Anzahl X der Kunden, die am Montag im Bioladen Milch kaufen, sei Poisson-verteilt mit Parameter 20, wohingegen die Anzahl Y der Kunden die am Montag Käse aber keine Milch kaufen, Poisson-verteilt mit Parameter 7 sei. Weiter nehmen wir an, dass X und Y unabhängig sind. Mit welcher Wahrscheinlichkeit kaufen am Montag im Bioladen genau 30 Kunden Milch oder Käse?

Abgabe der Hausaufgaben: Am Montag, den 30. Juni 2014, in der Vorlesung. Weitere Informationen zur Vorlesung und dem Übungsbetrieb finden Sie unter http://www-m5.ma.tum.de/Allgemeines/MA9943_2014S