TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Zentrum Mathematik

PROF. DR. M. WOLF
DR. S. KANIBER
DR. M. PRÄHOFER

Mathematik für Physiker 4
(Analysis 3)

www-m5.ma.tum.de/Allgemeines/MA9204_2021W

Wintersem. 2021/22
Blatt 4
(11.11.2021)

Zentralübung

Z4.1. Fluss eines Vektorfeldes durch ein Flächenstück

Sei $A \subseteq \mathbb{R}^3$ das durch die beiden Vektoren $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$ aufgespannte Parallelogramm mit dem bezüglich v_1, v_2 rechtshändigen Normalenvektorfeld v_A. Sei $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ das konstante Vektorfeld $F(x) = F_0 \in \mathbb{R}^3$. Begründen Sie, dass der Fluss des Vektorfeldes F durch das Flächenstück A, $\Psi_F(A)$, gegeben ist durch

$$\Psi_F(A) = \int_A \langle F(x), v_A(x)\rangle \mathrm{dS}(x).$$

Z4.2. Oberflächenintegrale und der Satz von Gauß

Gegeben sei der Kegel $K := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 0 \leq z \leq 2 - 2\sqrt{x^2 + y^2}\}$ und das Vektorfeld $F(x, y, z) = (x - y, xz, x^2+y^2+z^2)$. Bestätigen Sie den Satz von Gauß explizit.

Z4.3. Satz von Stokes im $\mathbb{R}^3$

Es sei $M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 = z,\ z \in (1/2, 1)\}$ ein Teil eines Paraboloids und $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $F(x, y, z) = (yz, -xz, 1)$. Berechnen Sie $\int_M \langle \operatorname{rot} F, v\rangle \,\mathrm{dS}$ mit Hilfe des Satzes von Stokes, wobei v das stetige Normalenfeld an M ist, das nach außen zeigt.

Präsenzaufgaben

P4.1. Das Coulombfeld einer Punktladung

Gegeben ist das Vektorfeld $E(x) = \frac{x}{\|x\|^3}$, $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$.

(a) Berechnen Sie die Divergenz von E.

(b) Berechnen Sie den Fluss von E durch den Rand von $B_R(0)$, $R > 0$.

(c) Sei $K \subseteq \mathbb{R}^3$ kompakt mit glattem Rand, $0 \notin \partial K$. Berechnen Sie $\int\limits_{\partial K} \langle E, v\rangle \mathrm{dS}$ für die beiden Fälle $0 \notin K$ und $0 \in K \setminus \partial K$. HINWEIS: Satz von Gauß.

P4.2. Ein magnetischer Monopol besitzt kein Vektorpotential

Gegeben ist das Vektorfeld $B(x) = \frac{x}{\|x\|^3}$, $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. $A : U \to \mathbb{R}^3$ mit $U \subseteq \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ offen heißt Vektorpotential von B auf U, wenn $\operatorname{rot} A = B$ gilt. Zeigen Sie, dass B auf $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ kein Vektorpotential besitzt. HINWEIS: Widerspruchsbeweis mit Satz von Stokes für ein geeignetes Flächenstück.

P4.3. Die zweite Greensche Formel

Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt mit glattem Rand, äußerem Normalenfeld v und sei $f, g \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Die Richtungsableitung von g in $x \in \partial A$ bezüglich dem Vektorfeld v ist definiert als

$$\partial_v g(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} g(x + tv(x))\big|_{t=0}.$$

(a) Überprüfen Sie, dass $\partial_v g(x) = \langle \operatorname{grad} g(x), v(x)\rangle$, kurz $\partial_v g = \langle \nabla g, v\rangle$ gilt.

(b) Man beweise die zweite Greensche Formel

$$\int_{\partial A} (f\partial_v g - g\partial_v f) \,\mathrm{d}S = \int_A (f\Delta g - g\Delta f)\mathrm{d}^n x$$

mit Hilfe der ersten Greenschen Formel.

Hausaufgaben

H4.1. Oberflächenintegrale von Vektorfeldern

Bestätigen Sie für den Paraboloidenstumpf

$$M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 \leq 4,\, 0 \leq z \leq 4 - x^2 - y^2\}$$

und das Vektorfeld $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $F(x, y, z) := (x + y, y + z, x + z)$ den Satz von Gauß.

H4.2. Eine Integralidentität

Sei A ein orientiertes Flächenstück auf das der Satz von Stokes anwendbar ist. Zeigen Sie für $f, g \in C^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$

$$\int\limits_{\partial A} f(r)\nabla g(r) \cdot \mathrm{d}r = \int\limits_{A} \langle \nabla f \times \nabla g, v\rangle \,\mathrm{dS}.$$

H4.3. Satz von Stokes

Sei $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 - 2z = 0, z \leq 2\}$ mit in positive z-Richtung orientiertem Normalenfeld. Berechnen Sie für das Vektorfeld $F(x, y, z) = (3y, -2xz, yz^2)$ den Fluss der Rotation von F durch A direkt und mittels der Zirkulation von F entlang ∂A über den Satz von Stokes.

Hausaufgabenabgabe: Montag, 22.11.2021, bis 8:00 in Moodle, maximal zu zweit