TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Zentrum Mathematik

Prof. Dr. M. Wolf
Dr. S. Kaniber
Dr. M. Prähofer

Mathematik für Physiker 4
(Analysis 3)

www-m5.ma.tum.de/Allgemeines/MA9204_2021W

Wintersem. 2021/22
Blatt 1
(21.10.2021)

Zentralübung

Z1.1. Mengen vom Lebesgue-Maß Null im $\mathbb{R}^n$

(a) Sei $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Quader und $f : Q \to \mathbb{R}^m$ eine stetige Funktion. Dann ist der Graph von f, $G_f = \{(x, f(x)) \,|\, x \in Q\}$ eine Nullmenge in $\mathbb{R}^{n+m}$.

(b) Man beweise für abgeschlossene Untermannigfaltigkeiten: Jede k-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ ist für $k < n$ eine Nullmenge in $\mathbb{R}^n$

Z1.2. Riemann-Integral im $\mathbb{R}^n$

Berechnen Sie die folgenden n-dimensionalen Riemann-Integrale:

(a) $\displaystyle\int_{[a,b]} f'(x)\mathrm{d}x$ für $a < b$, $f \in C^1([a, b])$, (b) $\displaystyle\int_{[0,1]^2} f(x)\mathrm{d}x$ mit $f(x) = x_1(1-x_1)x_2(1-x_2)$,

(c) das Volumen $\mathrm{vol}(H)$ des liegenden Halbkegels

$$H = \{(x, y, z) \,|\, 0 \le y \le 1 - |x|, z \in \left[0, \sqrt{(1-y)^2 - x^2}\right]\} \subseteq [-1, 1] \times [0, 1] \times [0, 1] =: Q.$$

Z1.3. Normalbereiche

Gegeben sei der n-dimensionalen Einheitssimplex

$$\Delta^{(n)} := \left\{x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, x_1, \ldots, x_n \ge 0,\ x_1 + \ldots + x_n \le 1\right\}.$$

a) Zeigen Sie, dass $\Delta^{(n)}$ ein Normalbereich ist.

b) Berechnen Sie das Volumen von $\Delta^{(4)} \subseteq \mathbb{R}^4$.

Präsenzaufgaben

P1.1. Mengen vom Lebesgue-Maß Null

(a) Man gebe eine Überdeckung durch achsenparallele Rechtecke der Diagonale des Einheitsquadrats, $D = \{(x, x) \,|\, 0 \le x \le 1\}$, an, deren Flächensumme kleiner als $\epsilon > 0$ ist.

(b) Begründen Sie, warum der Graph G_f von $f : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ eine Nullmenge in $\mathbb{R}^4$ ist.

P1.2. Integrierbarkeit

Begründen Sie die Existenz des Riemann-Integrals $\int_Q x^y \mathrm{d}(x, y)$ mit $Q = [0, 1]^2$ und versuchen Sie es auf zwei Arten zu berechnen.

P1.3. Satz von Fubini

Berechnen Sie $\displaystyle\int_0^L \int_y^L \exp(-x^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ für $L > 0$ einmal mit und einmal ohne den Satz von Fubini.

Hausaufgaben

H1.1. Mengen vom Lebesgue-Maß Null

(a) Geben Sie für die Winkelhalbierende $W := \{(x,x)\,|\,x > 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$ eine Überdeckung durch achsenparallele Rechtecke an, deren Gesamtvolumen kleiner als $\epsilon > 0$ ist.

(b) Dei Cantormenge C_∞. Sei $C_0 := [0,1]$, $C_{n+1} := \frac{1}{3}\big(C_n \cup (2 + C_n)\big)$, $C_\infty := \bigcap_{n\in\mathbb{N}_0} C_n$. Skizzieren Sie C_0, C_1 und C_2 und begründen Sie, warum C_∞ eine Nullmenge in $\mathbb{R}$ ist. HINWEIS: Es gilt $C_{n+1} \subseteq\ C_n$.

H1.2. Normalbereiche

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig. Vertauschen Sie für $\displaystyle\int_{-1}^{2}\int_{-x}^{2-x^2} f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x$ die Integrationsreihenfolge und begründen Sie ihre Schritte.

H1.3. Schwerpunkt und Trägheitstensor eines Oktaeders

Sei $M := \{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, |x_1| + |x_2| + |x_3| \leq 1\}$.

(a) Zeigen Sie, dass M ein Normalbereich ist.

(b) Berechnen Sie Volumen $\mathrm{Vol}(M)$, Schwerpunkt $\vec{S}_M$ und Trägheitstensor J_M von M,

$$\vec{S}_M = \mathrm{Vol}(M)^{-1}\int_M \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mathrm{d}^3x,\ \ J_M = \int_M \begin{pmatrix} x_2^2 + x_3^2 & -x_1x_2 & -x_1x_3 \\ -x_2x_1 & x_1^2 + x_3^2 & -x_2x_3 \\ -x_3x_1 & -x_3x_2 & x_1^2 + x_2^2 \end{pmatrix} \mathrm{d}^3x.$$

Hausaufgabenabgabe: Dienstag, 2.11.2021, bis 8:00
Abgabe in Moodle, maximal zu zweit.