Zentralübung

Z10.1. Eigenschaften der Faltung

Seien $f, g, h \in L^1(\mathbb{R}^n)$, dann gilt

(a) **(Kommutativität)** $f * g = g * f$,

(b) **(Assoziativität)** $(f * g) * h = f * (g * h)$,

(c) **(Distributivität)** $f * (g + h) = f * g + f * h$,

(d) $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$.

Z10.2. Faltung und Differenzierbarkeit

Seien $f \in L^1(\mathbb{R})$ und $u \in C^\infty(\mathbb{R})$ mit kompaktem Träger. Zeigen Sie, dass $u * f \in C^\infty(\mathbb{R})$ ist und für alle $k \in \mathbb{N}_0$ und $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$(u * f)^{(k)}(x) = (u^{(k)} * f)(x).$$

Z10.3. Diffusionsgleichung mit Drift

Lösen Sie die Diffusionsgleichung mit Drift,

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(x,t) = D\Delta\rho(x,t) + v \cdot \nabla\rho(x,t), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$$

mit $D > 0$, $v \in \mathbb{R}^n$, für die Anfangsbedingung $\rho(x, 0) = \rho_0(x)$, wobei $\rho_0, \widehat{\rho_0} \in L^1(\mathbb{R}^n)$.
Hinweis: Bestimmen Sie $G_t(x)$, so dass $\rho(x,t) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}(G_t * \rho_0)(x)$ mit Hilfe der Fouriertransformation bezüglich x, wie in der Vorlesung.

Präsenzaufgaben

P10.1. Faltung

Berechnen und skizzieren Sie die Faltung von $\chi_{[-5,5]}$ mit
(i) $\frac{1}{2}\chi_{[-1,1]}$, (ii) $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}$, (iii) $\frac{1}{\pi(1+x^2)}$ und (iv) $\frac{1}{2}e^{-|x|}$.

P10.2. Inhomogene lineare Differentialgleichung und Fouriertransformation

Gegeben sei die Differentialgleichung $\ddot{x}(t) = \frac{1}{4}x(t) + f(t)$ mit $f(t) = \mathrm{e}^{-|t|}$.

(a) Wie lauten die Lösungen der zugehörigen homogenen Differentialgleichung?

(b) Finden Sie eine spezielle Lösung $x_0 \in L^1(\mathbb{R}) \cap C^2(\mathbb{R})$ der inhomogenen Differentialgleichung mit Hilfe der Fouriertransformation.

(c) Geben Sie eine spezielle Lösung $x_1(t)$ an, deren Asymptotik für $t \to -\infty$ mit $f(t)$ übereinstimmt (d.h. $\lim\limits_{t\to-\infty} \frac{x_1(t)}{f(t)}$ existiert).

P10.3. Eindimensionale Wellengleichung

Seien $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $c > 0$. Bestimmen Sie mit Hilfe der Fouriertransformation bezüglich x eine Lösung der Wellengleichung $\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t) = c^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t)$ mit der Anfangsbedingung $u(x, 0) = f(x)$, $\frac{\partial}{\partial t}u(x, 0) = g(x)$.

Hausaufgaben

H10.1. Fouriertransformation von Gaußkurven

(a) Wie wurde in der Vorlesung die Faltung $f*g$ zweier Funktionen $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ definiert?

(b) Wie lautet die Fouriertransformierte der Gauß-Kurve $x \mapsto \exp(-\frac{x^2}{2t})$, $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$?

(c) Beweisen Sie, dass die Faltung $h = f_1 * f_2$ zweier Gauß-Kurven, $f_j(x) = \exp(-\frac{x^2}{2t_j})$, $t_j > 0$, $j = 1, 2$, wieder eine Gauß-Kurve ist. Berechnen Sie h.

H10.2. Fouriertransformation in $L^2(\mathbb{R})$

Sei $f(x) = \mathrm{e}^{-\alpha|x-1|}$, $\alpha > 0$.

(a) Begründen Sie, warum $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R})$ ist.

(b) Berechnen Sie $\widehat{f}(k)$.

H10.3. Inverse Fouriertransformation

(a) Berechnen Sie die Fouriertransformierte von $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} 1 - |x|, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

(b) Benutzen Sie (a) um zu zeigen, dass $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \mathrm{d}x = \pi$ gilt.

Hinweis: Warum ist hier $\check{\hat{f}} = f$?

Hausaufgabenabgabe: Freitag, 05.02.2021, bis 12:00 in Moodle, maximal zu zweit
Die Hausaufgaben werden nicht korrigiert, können aber als sinnvoll bearbeitet gewertet werden, falls die Bonusbedingung noch nicht erfüllt ist.