TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Zentrum Mathematik

PROF. DR. M. WOLF
DR. S. KANIBER
DR. M. PRÄHOFER

Mathematik für Physiker 4
(Analysis 3)
www-m5.ma.tum.de/Allgemeines/MA9204_2020W

Wintersem. 2020/21
Blatt 9
(15.01.2021)

Zentralübung

Z9.1. $L^p(\mathbb{R}^n)$ ist ein Banachraum

Zeige, dass $L^p(\mathbb{R}^n) = \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)/\!\sim$ mit $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n) = \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} \text{ messbar} | \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \mathrm{d}x < \infty\}$ und der Äquivalenzrelation $f \sim g \Leftrightarrow f = g$ fast überall, mit der Norm

$$\|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p}}$$

für $p \geq 1$ ein Banachraum ist.

Z9.2. Breit-Wigner-Verteilung

Berechnen und skizzieren Sie die Fouriertransformierten der folgenden Funktionen, $a > 0$.

(a) $f(x) = \frac{a}{\pi(x^2+a^2)}$,

(b) $F(x) = \mathrm{e}^{-a|x|}$.

Z9.3. Fouriertransformation bei linearer Abbildung

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ eine integrierbare Funktion. Zeigen Sie: Ist A eine invertierbare $n \times n$–Matrix, dann gilt für die Fouriertransformierte von $f_A(x) := f(Ax)$:

$$\widehat{f_A}(k) = \frac{1}{|\det A|} \widehat{f}\left((A^T)^{-1}k\right).$$

Präsenzaufgaben

P9.1. Hermite-Polynome

(a) Berechnen und skizzieren Sie $f^{(n)}(x)$ und ihre Fouriertransformierten für $n = 0, 1, 2$, mit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}.$$

(b) Bestimmen Sie linear unabhängige $h_n(x)$, $n = 0, 1, 2$, jeweils als Linearkombination von $f^{(k)}$, $k = 0, \ldots, n$, so dass $\widehat{h_n}(k) = \lambda_n h_n(k)$, $\lambda_n \in \mathbb{C}$, und skizzieren Sie diese.

P9.2. Glattheit und Abfall der Fouriertransformation

Sei $f \in C^m(\mathbb{R})$, $m \in \mathbb{N}_0$, und $f^{(j)} \in L^1(\mathbb{R})$ für alle $j = 0, \ldots, m$. Zeigen Sie, dass

$$\widehat{f}(k) = \mathcal{O}\left(\tfrac{1}{|k|^m}\right) \quad \text{für} \quad |k| \to \infty.$$

P9.3. Eine lineare partielle Differentialgleichung

Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$ und $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ eine Lösung der linearen partiellen Differentialgleichung

$$\partial_1^2 u + \partial_2^2 u + \partial_1 u = u + f.$$

Welche Eigenschaften der Fouriertransformation von u können Sie folgern.
Welche Voraussetzungen an u müssen dazu erfüllt sein?

Hausaufgaben

H9.1. Beispiele für Fouriertransformationen

Berechnen und skizzieren Sie die Fouriertransformierten der folgenden Funktionen ($x \in \mathbb{R}$)

(a) $f(x) = \max\{0, a - |x|\}$, $a > 0$,

(b) $g(x) = \frac{1}{x^4+4}$.

H9.2. Hermite-Funktionen bilden ein Orthonormalsystem

Für $n \in \mathbb{N}_0$ ist $H_n(t) := (-1)^n e^{t^2} \frac{d^n}{dt^n} e^{-t^2}$ ein Polynom vom Grad n. Die H_n heißen Hermite-Polynome. Zeigen Sie jeweils für alle $n \in \mathbb{N}$:

(a) $H_n(t) = 2tH_{n-1}(t) - H'_{n-1}(t)$ und damit $\frac{d}{dt}\left(e^{-t^2} H_{n-1}(t)\right) = -e^{-t^2} H_n(t)$.

(b) $H'_n = 2nH_{n-1}(t)$. Hinweis: Man verwende die verallgemeinerte Leibniz-Formel $\frac{d^n}{dt^n}(f(t)g(t)) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} f^{(j)}(t)g^{(n-j)}(t)$.

(c) $\int_{-\infty}^{\infty} H_n(t)e^{-t^2}dt = 0$.

(d) Für $m \leq n$ ist $\int_{-\infty}^{\infty} H_m(t)H_n(t)e^{-t^2}dt = 2^m m! \sqrt{\pi}\delta_{m,n}$. Hinweis: Setze $v'(t) = H_n(t)e^{-t^2}$.

(e) Definiert man die Hermite-Funktionen $h_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h_n(t) := \frac{1}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} H_n(t)e^{-\frac{1}{2}t^2}$, so gilt $\int_{-\infty}^{\infty} h_m(t)h_n(t)dt = \delta_{m,n}$.

H9.3. Fouriertransformationen des Halbkreises

Berechnen Sie die Fouriertransformationen von $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & \text{für } |x| < 1, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad \text{und} \qquad g(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2} & \text{für } |x| < 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Skizzieren Sie f, g und ihre Fouriertransformationen.
Hinweis: Substitution $x = \sin t$, für g noch partielle Integration. Die Besselfunktionen sind gegeben durch $J_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(x \sin t - nt)dt = J_{-n}(-x) = (-1)^n J_{-n}(x)$.

Hausaufgabenabgabe: Freitag, 29.01.2021, bis 12:00 in Moodle, maximal zu zweit