<u>Def.:</u> Für $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ heißt $f*g$ definiert durch

$$\boxed{(f*g)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\, g(y)\, dy}$$

die Faltung von f und g.

<u>Bem.:</u>
- Faltungen finden Anwendungen auch in der Signalverarbeitung (z.B. „Filter" in dig. Bildbearbeitung oder Akustik)
- Das Produkt zweier L^1-Funktionen ist nicht notwendigerweise wieder L^1 (Bsp.: $f(x) = \begin{cases} x^{-1/2}, & x \in (0,1) \\ 0 \end{cases}$, $f \in L^1$ aber $f^2 \notin L^1$).

  So ist $f*g$ nicht immer überall definiert. Allerdings ist mit $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ auch $(x,y) \mapsto f(x)\, g(y)$ integrierbar in $\mathbb{R}^{2n}$, so dass mit der Transformation $(x,y) \mapsto (x-y, y)$ folgt $\int_{\mathbb{R}^{2n}} |f(x-y)\, g(y)|\, d(x,y) < \infty$. Mit Hilfe des Satzes von Fubini erhält man so:

<u>Lemma:</u> Sind $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, dann gilt $f*g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und $x \mapsto f*g(x)$ ist fast überall definiert.

Korollar: (Eigenschaften der Faltung) Sind $f, g, h \in L^1(\mathbb{R}^n)$ dann gilt:

$$\boxed{\begin{array}{ll} (i) & f*g = g*f \\ (ii) & (f*g)*h = f*(g*h) \\ (iii) & f*(g+h) = f*g + f*h \\ (iv) & \|f*g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1 \end{array}}$$

Kommutativität

Assoziativität

Distributivität

d.h. $*: L^1 \times L^1 \to L^1$ definiert ein „Produkt" auf L^1 und macht daraus eine „Banachalgebra".

Beweis: Übung.

Satz: (Fouriertransformierte der Faltung)

Für $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ gilt: $\boxed{\widehat{f*g} = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \hat{f} \cdot \hat{g}}$

Beweis:
$$\widehat{f*g}(k) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \iint f(x-y) g(y) \, dy \, e^{-ik\cdot x} \, dx$$

$$\underset{\text{Fubini}}{=} (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int \underbrace{\int f(x-y) e^{-ik\cdot x} \, dx}_{(2\pi)^{\frac{n}{2}} e^{-ik\cdot y} \hat{f}(k)} \, g(y) \, dy$$

$$= (2\pi)^{\frac{n}{2}} \hat{f}(k) \, \hat{g}(k). \qquad \square$$

Def.: Für $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ist die inverse Fouriertransformierte definiert durch
$\check{f}(x) := \hat{f}(-x)$.

Lemma: Sei $f, \hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und $\delta_L(x) := \left(\frac{L}{\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\frac{1}{2}L^2\|x\|^2}$, $L \in \mathbb{N}$.
Dann gilt $\forall x \in \mathbb{R}^n$: $\lim\limits_{L\to\infty} f * \delta_L(x) = \check{\hat{f}}(x)$.

Beweis: Wegen $\hat{\delta}_1 = \delta_1$ gilt $\delta_L(x) = L^n \delta_1(Lx) = L^n \hat{\delta}_1(Lx) = L^n \hat{\delta}_1(-Lx)$.

Damit ist:
$$\delta_L(x) = \left(\frac{L}{2\pi}\right)^n \int_{\mathbb{R}^n} e^{iLk\cdot x}\, e^{-\frac{1}{2}\|k\|^2}\, dk$$
$$\underset{\xi := Lk}{=} (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\xi\cdot x}\, e^{-\frac{\|\xi\|^2}{2L^2}}\, d\xi$$

Also gilt
$$f * \delta_L(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\, \delta_L(x-y)\, dy$$
$$= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\xi\cdot(x-y)}\, e^{-\frac{\|\xi\|^2}{2L^2}}\, d\xi\, dy$$
$$\underset{\text{Fubini}}{=} (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int \underbrace{\hat{f}(\xi)\, e^{i\xi\cdot x - \frac{\|\xi\|^2}{2L^2}}}_{=: g_L(\xi)}\, d\xi$$

Da $|g_L(\xi)| \le |\hat{f}(\xi)|$ & $\hat{f} \in L^1$, greift der Satz über majorisierte Konvergenz, so dass $\lim\limits_{L\to\infty} f * \delta_L(x) = \check{\hat{f}}(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$. □

Satz: (Umkehrsatz)

> Sind $f, \hat{f} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$, dann gilt für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$: $\check{\hat{f}}(x) = f(x)$. Dies gilt insbesondere für alle x an denen f stetig ist.

Beweisidee: (Details → z.B. Königsberger)

Nach dem Lemma gilt $f * \delta_\iota \to \check{\hat{f}}$ für $\iota \to \infty$.

Da die δ_ι eine „Dirac-Folge" bilden, gilt außerdem

$f * \delta_\iota \to f$ fast überall und insbesondere dort, wo f stetig ist. $\square$